

1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Taux de variation
&
Nombre dérivé

Correction

 www.freemaths.fr

LA FONCTION VALEUR ABSOLUE

CORRECTION

1. f est-elle dérivable en $a > 0$?

Si $a > 0$, nous pouvons écrire: $|a| = a$.

a. Le taux de variation entre a et $a + h$:

Ici: $a \in]0; +\infty[$ (car $a > 0$) et $a + h \in]0; +\infty[$ ($h \neq 0$).

$$\begin{aligned} \text{Dans ces conditions: } \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{|a+h| - |a|}{h} \\ &= \frac{(a+h) - (a)}{h} \\ &= \frac{h}{h} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, le taux de variation entre a et $a + h$ est: $\tilde{\tau}(h) = 1$.

b. Calculons la limite de $\tilde{\tau}(h)$ quand h tend vers 0:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\tau}(h) = 1.$$

D'où: $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{T}}(h) = 1.$

c. Conclusion:

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{T}}(h) = 1$ (nombre réel fini): oui f est dérivable en $a > 0$

et $f'(a) = 1.$

2. f est-elle dérivable en $b < 0$?

Si $b < 0$, nous pouvons écrire: $|b| = -b.$

a. Le taux de variation entre b et $b + h$:

Ici: $b \in]-\infty; 0[$ (car $b < 0$) et $b + h \in]-\infty; 0[$ ($h \neq 0$).

Dans ces conditions:
$$\begin{aligned} \frac{f(b+h) - f(-b)}{h} &= \frac{|b+h| - |b|}{h} \\ &= \frac{(-b-h) - (-b)}{h} \\ &= \frac{-h}{h} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Ainsi, le taux de variation entre b et $b + h$ est: $\tilde{\mathcal{T}}(h) = -1.$

b. Calculons la limite de $\tilde{\mathcal{T}}(h)$ quand h tend vers 0:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{T}}(h) = -1.$$

D'où: $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\tau}(h) = -1.$

c. Conclusion:

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\tau}(h) = -1$ (nombre réel fini): oui f est dérivable en $b < 0$.

et $f'(b) = -1.$

3. f est-elle dérivable en "0" ?

a. Le taux de variation entre "0" et "0 + h":

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

$$= \frac{|h|}{h}.$$

Ainsi, le taux de variation entre "0" et "0 + h" est: $\tilde{\tau}(h) = \frac{|h|}{h}.$

b. Calculons la limite de $\tilde{\tau}(h)$ quand h tend vers 0:

Distinguons deux cas:

• h tend vers 0 par valeurs positives:

Dans ce cas: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{\tau}(h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1. \quad (|h| = h)$

• h tend vers 0 par valeurs négatives:

Dans ce cas: $\lim_{h \rightarrow 0^-} \tilde{\tau}(h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1. \quad (|h| = -h)$

On obtient ainsi deux limites différentes: 1 et -1 .

Or la limite de $\mathcal{T}(h)$ quand h tend vers 0 doit être unique.

Donc: f n'est pas dérivable en " 0 ".

4. Concluons sur le domaine de dérivabilité de la fonction valeur absolue:

La fonction valeur absolue est uniquement dérivable sur: \mathbb{R}^* .