1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Taux de variation
&
Nombre dérivé

Correction

LA FONCTION RACINE CARRÉE

CORRECTION

D'après le cours, nous savons que:

- le taux de variation ou **taux d'accroissement** de f entre a et $b = a + h$ ($h \neq 0$) est: $\mathcal{T}(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$,
- f est dérivable en " a " ssi: $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = \ell$, **$\ell$ étant un nombre réel fini,**
- le nombre dérivée de f en " a " est: $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \mathcal{T}(h)$.

1. f est-elle dérivable en $a > 0$?

a. L'ensemble de définition:

L'ensemble de définition est: $Df = [\,0\,; +\infty\,[$.

b. Exprimons, en fonction de h, le taux de variation entre a et a + h:

Ici: $a \in [\,0\,; +\infty\,[$ (car $a > 0$) et $a + h \in [\,0\,; +\infty\,[$ $(h \neq 0)$.

Dans ces conditions: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$

$$= \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}) \times (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h \times (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{(a+h)-(a)}{h \times (\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

$((a-b)(a+b) = a^2 - b^2)$

$$= \frac{1}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}.$$

Ainsi, le taux de variation entre a et a + h est: $\tau(h) = \dfrac{1}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}.$

c. Calculons la limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0:

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

D'où: $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}.$

d. Conclusion:

Comme $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ (nombre réel fini): oui f est dérivable en $a > 0$

et $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}.$

2. f est-elle dérivable en $a = 0$?

• Nous savons que le taux de variation entre a et a + h est: $\tau(h) = \dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}.$

Donc le taux de variation entre $a = 0$ et $a + h = h$ est: $\tau(h) = \dfrac{1}{\sqrt{h}}.$

- Lorsque h tend vers 0 par valeurs positives, le nombre $\sqrt{h}$ tend vers 0 en étant positif.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = +\infty$.

- Comme $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h)$ ne tend pas vers un nombre réel fini: f n'est pas dérivable en $a = 0$.

3. Concluons sur le domaine de dérivabilité de la fonction racine carrée:

La fonction racine carrée est uniquement dérivable sur: $]\,0\,;+\infty\,[$.