1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Fonctions Polynômes

Correction

LA NOTE SUR 20

CORRECTION

1. a. Déterminons la note de service obtenue au bout d'une année:

Il s'agit de calculer $f(1)$, avec pour tout $x \in [\,0\,;5\,]$: $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}$.

$f(1) = (1)^3 - 6 \times (1)^2 + 9 \times (1)$

$= 4$ sur 20.

Ainsi, le service obtient au bout de 1 an la note de: 4 sur 20.

1. b. Montrons que le service donne pleine satisfaction au bout de 5 ans:

Pour répondre à cette question, nous devons calculer $\boldsymbol{f(5)}$.

Ici: $\boldsymbol{f(5) = (5)^3 - 6 \times (5)^2 + 9 \times (5)}$

$\boldsymbol{= 125 - 6 \times 25 + 45}$

$\boldsymbol{=}$ 20 sur 20.

Ainsi, au bout de 5 ans, le service donne pleine satisfaction car sa note est de: 20 sur 20.

2. a. Calculons f' sous forme développée:

La fonction f est dérivable sur $[0;5]$.

D'où, nous pouvons calculer f' sur $[0;5]$: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

La dérivée de la fonction f, pour tout $x \in [0;5]$, est donc:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

2. b. Montrons que $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$:

Pour tout $x \in [0;5]$: $3(x-1)(x-3) = 3(x^2 - 3x - x + 3)$

$= 3x^2 - 12x + 9$

$= f'(x)$.

Donc pour tout $x \in [0;5]$, nous avons bien: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

2. c. Dressons le tableau de variations de f sur $[0;5]$:

Étape 1: on détermine le signe de f'.

f' admet donc 2 racines: $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.

D'où le tableau de signe de f' sur $[0;5]$ est:

x	0		1		3		5
$(x-1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi le signe de f' sur $[0; 5]$ est:
- strictement positif sur $[0; 1[\cup]3; 5]$
- nul si $x = 1$ ou $x = 3$
- strictement négatif sur $]1; 3[$.

Étape 2: on dresse le tableau de variation de f.

Le tableau de variation de f sur $[0; 5]$ est le suivant:

x	0		1		3		5
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	a	↗	b	↘	c	↗	d

, avec:
- $a = 0$
- $b = 4$
- $c = 0$
- $d = 20$.

Ainsi:
- f est croissante sur $[0; 1]$
- f est décroissante sur $[1; 3]$
- f est croissante sur $[3; 5]$.