

1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Études de Fonctions

Correction

 www.freemaths.fr

EXERCICE 4

[Centres Étrangers 2016]

Partie A:

1. Montrons que $f'(x) = \frac{8e^{-x}}{(20e^{-x} + 1)^2}$:

Ici: • $f(x) = \frac{0,4}{20e^{-x} + 1} + 0,4$

• $Df = [0;8]$.

Posons: $f = \frac{f_1}{3f_2 + f_3} + f_4$, avec: $f_1(x) = 0,4$, $f_2(x) = e^{-x}$ et $f_3(x) = 1$.

f_1 et f_3 sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $[0;8]$.

f_2 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur l'intervalle $[0;8]$.

Par conséquent, $h = 3f_2 + f_3$ est dérivable sur $[0;8]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[0;8]$.

De plus, $\frac{f_1}{h}$ est dérivable sur $[0;8]$ comme quotient de 2 fonctions dérivables sur $[0;8]$, avec: pour tout $x \in [0;8]$, $h(x) \neq 0$.

Enfin, f est dérivable sur $[0;8]$ comme somme $\left(\frac{f_1}{h} + f_4\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $[0;8]$.

Ainsi: nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0;8]$.

$$\text{Pour tout } x \in [0;8]: f'(x) = \frac{-0,4x(-20e^{-x})}{(20e^{-x} + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{8e^{-x}}{(20e^{-x} + 1)^2}$$

Au total: pour tout $x \in [0;8]$, $f'(x) = \frac{8e^{-x}}{(20e^{-x} + 1)^2}$.

2. Déterminons l'intervalle sur lequel f est convexe:

Ici: • $f'(x) = \frac{8e^{-x}}{(20e^{-x} + 1)^2}$

• $f''(x) = g(x) = 8e^{-x} \cdot \left(\frac{20e^{-x} - 1}{(20e^{-x} + 1)^3} \right)$.

Nous savons que f est convexe ssi: $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$.

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 8e^{-x} \cdot \left(\frac{20e^{-x} - 1}{(20e^{-x} + 1)^3} \right) \geq 0.$$

Or: pour tout $x \in [0;8]$, $8e^{-x} > 0$ et $(20e^{-x} + 1)^3 > 0$.

D'où: $g(x) \geq 0$ ssi: $20e^{-x} - 1 \geq 0$ cad ssi: $e^{-x} \geq \frac{1}{20} \Rightarrow x \leq \ln(20)$.

Au total, f est convexe sur l'intervalle: $[0; \ln(20)]$.

Partie B:

Proposition 1: " L'altitude du village B est 0,6 km "

C'est faux.

Justifions le.

L'altitude associée, en kilomètres, du village B est: $f(8)$.

Or: $f(8) \approx 0,797$ km.

Au total, l'altitude du village B est d'environ: 797 mètres, et pas 600 mètres.

Proposition 2: " L'écart d'altitude entre les villages A et B est de 378 mètres ".

C'est vrai.

Justifions le.

Il s'agit de calculer ici: $f(8) - f(0)$.

$$f(8) - f(0) \approx 0,797 - 0,419 \Rightarrow f(8) - f(0) \approx 0,378.$$

Au total, l'écart d'altitude entre les villages A et B est bien de: 378 mètres.

Proposition 3: " La pente en A vaut 1,8% ".

C'est vrai.

Justifions le.

Il s'agit de calculer ici: $f'(0)$.

$$f'(0) = \frac{8e^{-0}}{(20e^{-0} + 1)^2} \Rightarrow f'(0) \approx 0,018.$$

Au total, la pente en A vaut environ: 1,8%.