1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Études de Fonctions

Correction

LES GRILLE-PAINS

CORRECTION

1. Donnons les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$:

Nous avons: • $f(0) = -2$ $(A\ (0 ; -2))$

• $f'(0) = 10$ $(y = 10x - 2)$.

2. a. Déterminons f' pour tout réel de l'intervalle $[0 ; 5]$:

Ici: • $f(x) = (ax - 2)\, e^{-x}$ **($u \times v$)**

• $Df = [0 ; 5]$

• f est deux fois dérivables sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

Comme f est deux fois dérivables sur $[0 ; 5]$, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0 ; 5]$.

Pour tout $x \in [0 ; 5]$: $f'(x) = a \times e^{-x} + (ax - 2) \times (-e^{-x})$ **($u' \times v + u \times v'$)**

=> $f'(x) = e^{-x} \times (-ax + a + 2)$.

Au total, pour tout $x \in [0 ; 3]$: $f'(x) = e^{-x} \times (-ax + a + 2)$.

2. b. Déduisons-en que $a = 8$:

Nous savons que: • $f'(0) = 10$

• $f'(x) = e^{-x} \times (-ax + a + 2)$.

D'où: $f'(0) = 10$ et $f'(0) = a + 2$.

En égalisant: $a + 2 = 10 \Rightarrow a = 8$.

Au total, nous avons bien: $a = 8$.

2. c. Donnons l'expression de f' en fonction de x:

Comme $a = 8$: pour tout $x \in [\,0\,;5\,]$, $f'(x) = e^{-x} \times (-8x + 10)$.

3. a. Précisons le signe de f' sur l'intervalle $[\,0\,;5\,]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\,0\,;5\,]$:

• **1^er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $e^{-x} \times (-8x + 10) = 0$

$\Leftrightarrow -8x + 10 = 0^{*}$, cad: $x = 1,25$.

• **2^ème cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $e^{-x} \times (-8x + 10) < 0$

$\Leftrightarrow -8x + 10 < 0^{*}$, cad: $x > 1,25$ ou $x \in]\,1,25\,;5\,]$.

• **3^ème cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $e^{-x} \times (-8x + 10) > 0$

$\Leftrightarrow -8x + 10 > 0^{*}$, cad: $x < 1,25$ ou $x \in [\,0\,;1,25\,[$.

(*: car pour tout $x \in [\,0\,;5\,]$, $e^{-x} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[\,0\,;1,25\,]$,

(car sur $[\,0\,;1,25\,]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur [1,25 ; 5].

(car sur [1,25 ; 5], $f'(x) \leqslant 0$)

3. b. Donnons le tableau de variation de f sur [0 ; 5]:

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0		1,25		5
f'		+	0	-	
f	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = f(0)$ => $a = -2$,

• $b = f(1,25)$ => $b = 8e^{-1,25}$,

• $c = f(5)$ => $c = 38e^{-5}$.

3. c. Résolvons l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle [0 ; 5]:

$f(x) = 0$ <=> $e^{-x} \times (8x - 2) = 0$

<=> $8x - 2 = 0$ (car pour tout $x \in [\,0\,;5\,]$: $e^{-x} > 0$)

=> $x = 4$.

Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet pour unique solution: $x = 4$.

4. a. Donnons l'expression de f'':

D'après le logiciel: $g'(x) = e^{-x} \times (8x - 18)$.

Ainsi: $f''(x) = e^{-x} \times (8x - 18)$.

4. b. Déterminons la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion:

> Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand: $x = \frac{9}{4}$ (logiciel).

Au total, l'abscisse du point d'inflexion est: $x = 2,25$.

5. a. Déterminons la quantité de grille-pains que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximum:

D'après le tableau de variation que nous avons dressé, nous remarquons que f, cad le bénéfice, est maximum quand: $x = 1,25$.

Dans ces conditions le nombre de grille-pains qui permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal est: 1250.

5. b. Déterminons le bénéfice maximal:

Le bénéfice maximal est atteint quand: $x = 1,25$.

Or: $f(1,25) = 8\ e^{-1,25}$.

Dans ces conditions, le bénéfice maximal est: $B_{max} = 8\ e^{-1,25} \times 100\,000$ €.

Au total, le bénéfice maximal réalisé par l'entreprise est:

$$B_{max} \approx 229\,204 \text{ €}.$$