

# 1re

# MATHÉMATIQUES

## Enseignement de Spécialité

## Études de Fonctions

**Correction**

 [www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

## EXERCICE 3

[ Antilles-Guyane 2018 ]

### Partie A: Étude de la fonction $f$

1. Justifions que, pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$ :

Ici: •  $f(x) = e^{-x} (-\cos x + \sin x + 1)$

•  $Df = \mathbb{R}$ .

D'après le cours, nous savons que: •  $\cos x \in [-1; 1]$ ,

•  $\sin x \in [-1; 1]$ .

Dans ces conditions: •  $-1 \leq \cos x \leq 1$  ou:  $-1 \leq -\cos x \leq 1$ ,

•  $-1 \leq \sin x \leq 1$ .

Ainsi, nous avons:  $-2 \leq -\cos x + \sin x \leq 2$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -\cos x + \sin x + 1 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -e^{-x} \leq e^{-x} (-\cos x + \sin x + 1) \leq 3e^{-x}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Au total, pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ , nous avons bien:  $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$  (1).

2. Déduisons-en la limite de  $f$  en  $+\infty$ :

D'après le cours, nous savons que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ .

Ainsi: •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0$  (terme de gauche de (I))

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{-x} = 0$  (terme de droite de (I)).

D'où, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Au total:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$

3. Calculons  $f'$  pour tout  $x \in [-\pi; \pi]$ :

Ici: •  $f(x) = e^{-x} (-\cos x + \sin x + 1)$  (u x v)

•  $Df = [-\pi; \pi]$ .

Posons:  $f = f_1 \times f_2$ , avec:  $f_1(x) = e^{-x}$  et  $f_2(x) = -\cos x + \sin x + 1$ .

$f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , comme fonction "exponentielle", donc dérivable sur  $[-\pi; \pi]$ .

$f_2$  est dérivable sur  $[-\pi; \pi]$ .

Par conséquent,  $f$  est dérivable sur  $[-\pi; \pi]$  comme produit ( $f_1 \times f_2$ ) de deux fonctions dérivables sur  $[-\pi; \pi]$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [-\pi; \pi]$ .

Pour tout  $x \in [-\pi; \pi]$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-e^{-x}) \times (-\cos x + \sin x + 1) + (e^{-x}) \times (\sin x + \cos x) && (u' \times v + u \times v') \\ &= 2 e^{-x} \cos x - e^{-x} \\ &= e^{-x} (2 \cos x - 1). \end{aligned}$$

Au total, pour tout  $x \in [-\pi; \pi]$ :  $f'(x) = e^{-x} (2 \cos x - 1)$ .

4. a. Déterminons le signe de  $f'$  sur  $[-\pi; \pi]$ :

Nous allons distinguer 3 cas pour tout  $x \in [-\pi; \pi]$ , sachant que:  $e^{-x} > 0$ .

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } e^{-x} (2 \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3}$$

• 2<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) < 0$ .

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } e^{-x} (2 \cos x - 1) < 0 \Leftrightarrow 2 \cos x - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in [-\pi; -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}; \pi]$$

• 3<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) > 0$ .

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } e^{-x} (2 \cos x - 1) > 0 \Leftrightarrow 2 \cos x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}[$$

#### 4. b. Dédouons-en les variations de $f$ sur $[-\pi; \pi]$ :

D'après les 3 cas précédents, nous pouvons en déduire que:

- $f$  est décroissante sur  $[-\pi; -\frac{\pi}{3}]$  et sur  $[\frac{\pi}{3}; \pi]$ ,
- $f$  est croissante sur  $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$ .

### Partie B: Aire du logo

#### 1. Etudions la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$ :

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer le signe de  $f(x) - g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}: f(x) - g(x) &= e^{-x} (-\cos x + \sin x + 1) + e^{-x} \cos x \\ &= e^{-x} (\sin x + 1). \end{aligned}$$

Or pour tout  $x \in \mathbb{R}$ : •  $e^{-x} > 0$ ,

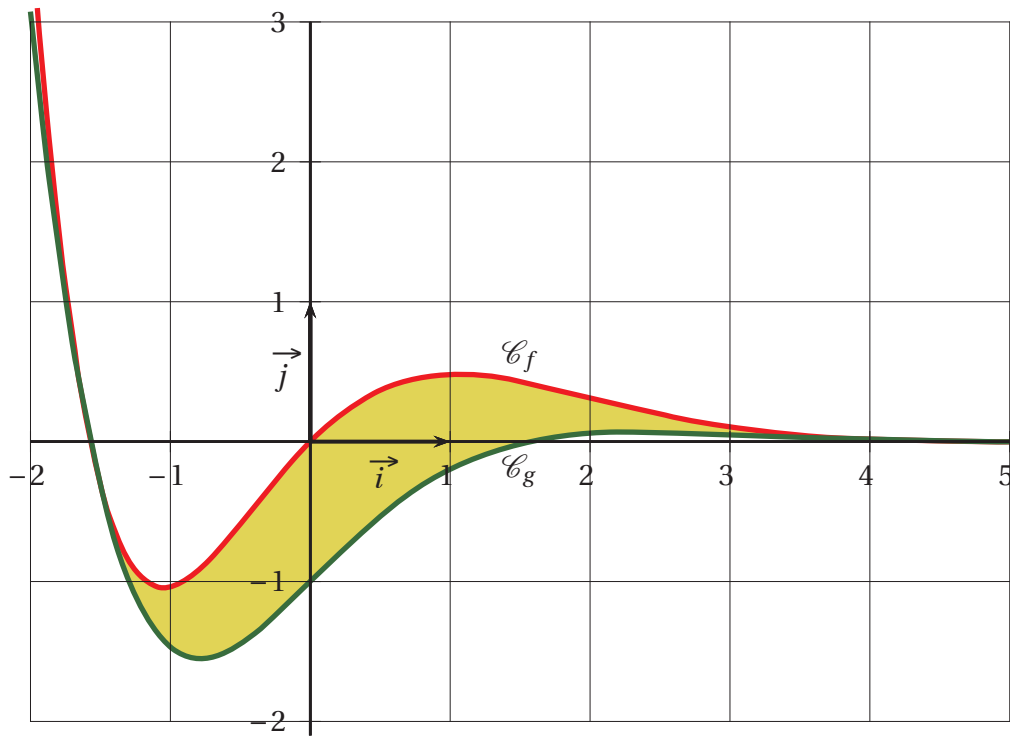
•  $\sin x + 1 \geq 0$ , car:  $\sin x \in [-1; 1]$ .

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :  $e^{-x} (\sin x + 1) \geq 0$  cad:  $f(x) - g(x) \geq 0$ .

Au total, comme pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) - g(x) \geq 0$ : la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située au dessus de la courbe  $\mathcal{C}_g$ .

#### 2. a. Hachurons le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique fourni en annexe:

Le domaine  $\mathcal{D}$  hachuré en jaune est le suivant:



2. b. b1. Calculons l'aire du domaine  $\mathcal{D}$ :

L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine  $\mathcal{D}$  correspond à:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx.$$

$$\text{Or: } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-x} (\sin x + 1) dx$$

$$= [H(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \left[ \left( -\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1 \right) e^{-x} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left( e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}} \right).$$

Au total, la valeur exacte de l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  est:  $\frac{1}{2} \left( e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}} \right)$  u.a.

2. b. b2. Donnons une valeur approchée à  $10^{-2}$  près en  $\text{cm}^2$  de l'aire de  $\mathcal{D}$ :

En  $\text{cm}^2$  et à  $10^{-2}$  près, une valeur approchée du domaine  $\mathcal{D}$  est d'environ:

9,6  $\text{cm}^2$ .