1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Études de Fonctions

Correction

www.freemaths.fr

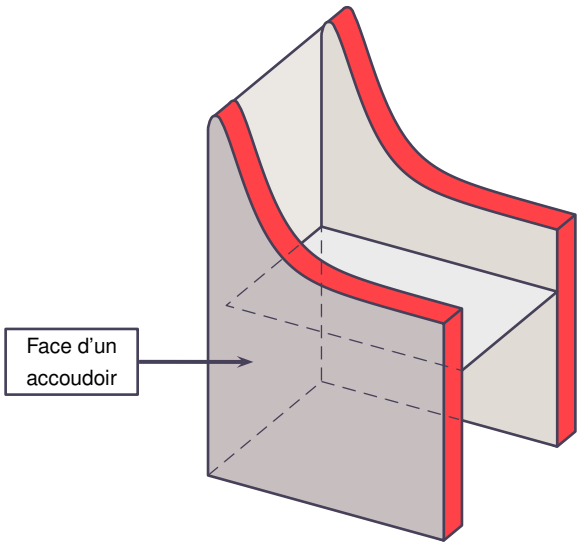
LE FAUTEUIL

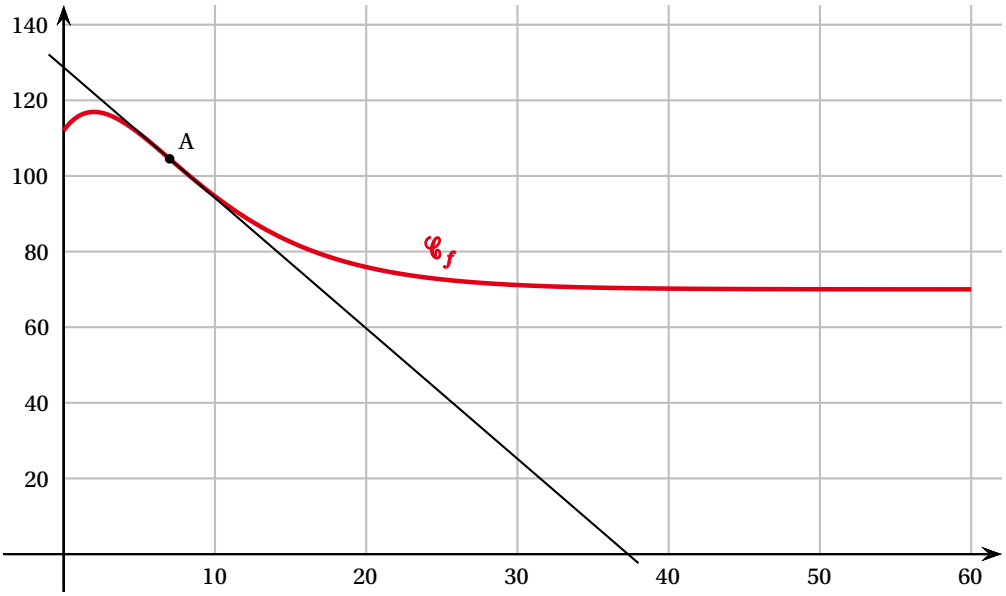
CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons une valeur approchée de f (0) et f (60):

Soient les 2 graphiques suivantes:





Freemaths : Tous droits réservés

Graphiquement, il semble que:
- $f(0) \approx 115$,
- $f(60) \approx 72$.

Ainsi, les valeurs approchées de $f(0)$ et $f(60)$ sont:

$$f(0) \approx 115 \quad \text{et} \quad f(60) \approx 72.$$

2. Déterminons $f''(7)$:

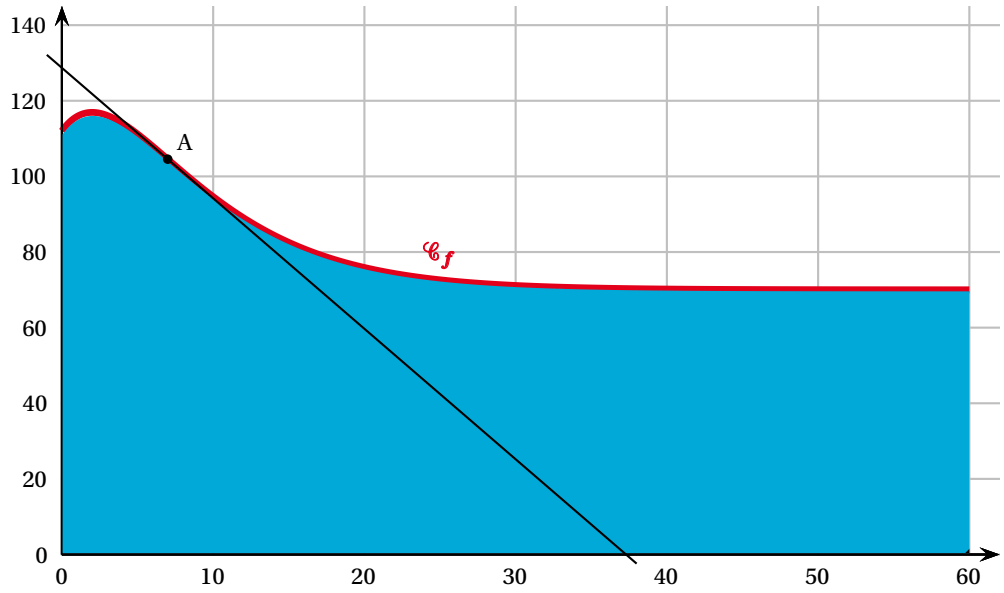
D'après l'énoncé le point A $(7; f(7))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

En tant que point d'inflexion, nous pouvons affirmer que: $f''(7) = 0$.

Au total: $f''(7) = 0$.

3. a. Représentons la surface demandée:

La surface située entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 60$ correspond à la zone turquoise du graphique suivant:



Freemaths : Tous droits réservés

3. b. L'estimation de l'ébéniste est-elle correcte ?

L'estimation de l'ébéniste **n'est pas correcte**.

En effet, la zone turquoise contient le rectangle 70 x 60 = 4200 u.a.

Par conséquent, l'aire de cette surface turquoise est strictement supérieure à 4200 u.a.

Or: $3800 < 4200$.

Ainsi, comme $3800 < 4200$: l'estimation de l'ébéniste est **fausse !**

Partie B:

1. Calculons f' sur l'intervalle [0 ; 60]:

Ici: • $f(x) = 70 + (14x + 42)\, e^{-\frac{x}{5}}$ $\quad$ **(70 + u x e^v)**

• $Df = [\,0\,;\,60\,]$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur [0 ; 60].

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,;\,60\,]$.

Pour tout $x \in [\,0\,;\,60\,]$:

$$f'(x) = 0 + (14) \times (e^{-\frac{x}{5}}) + (14x + 42) \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times (e^{-\frac{x}{5}})$$

(0 + u' x e^v + u x v' x e^v)

$$= \frac{1}{5}(-14x + 28)\, e^{-\frac{x}{5}}.$$

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;\,60\,]$, nous avons bien:

$$f'(x) = \frac{1}{5}(-14x + 28)\, e^{-\frac{x}{5}}.$$

Freemaths : Tous droits réservés

2. a. Etudions le signe de f' sur $[\,0\,;60\,]$:

$f'(x) = \frac{1}{5}(-14x + 28)\, e^{-\frac{x}{5}}$, pour tout $x \in [\,0\,;60\,]$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [\,0\,;60\,]$:

• **1er cas**: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $-14x + 28 \leqslant 0$ **cad ssi**: $x \geqslant 2$ **ou** $x \in [\,2\,;60\,]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-\frac{x}{5}} > 0$)

• **2ème cas**: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $-14x + 28 \geqslant 0$ **cad ssi**: $x \leqslant 2$ ou $x \in [\,0\,;2\,]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-\frac{x}{5}} > 0$)

Ainsi: • f est croissante sur $[\,0\,;2\,]$,

• f est décroissante sur $[\,2\,;60\,]$.

2. b. Dressons le tableau des variations de f sur $[\,0\,;60\,]$:

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

x	0		2		60
f'		+	0	-	
f	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = 112$,

Freemaths : Tous droits réservés

• $b = 70 + 70\, e^{-\frac{2}{5}}$, $\quad (\approx 117)$

• $c = 70 + 882\, e^{-12}$. $\quad (\approx 70)$

3. Etudions la convexité de f :

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici: $f''(x) = 14 \times \left(\dfrac{x-7}{25}\right) \times e^{-\frac{x}{5}}$.

Dans ces conditions: • $f''(x) \leqslant 0$ **ssi**: $x \leqslant 7$ **cad**: $x \in [0;7]$.

• $f''(x) \geqslant 0$ **ssi**: $x \geqslant 7$ **cad**: $x \in [7;60]$.

Ainsi: • f est concave sur $I = [0;7]$,

• f est convexe sur $I' = [7;60]$.

Freemaths : Tous droits réservés