

# 1re

# MATHÉMATIQUES

## Enseignement de Spécialité

## Études de Fonctions

**Correction**

 [www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

## EXERCICE 2

[ Inde, Pondichéry 2016 ]

### Partie A: Étude Graphique

1. Déterminons la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal:

Pour répondre à cette question, graphiquement, il suffit de prendre le minimum de la courbe (C) (qui correspond en fait au minimum de la fonction C).

Une lecture graphique nous donne:  $x_{\min} \approx 4,5$  tonnes.

Au total, le coût quotidien de l'entreprise est minimal quand: la quantité de granulés produite est de 4,5 tonnes.

2. a. Déterminons  $C(6)$ ,  $R(6)$  et  $D(6)$ :

Graphiquement:  $\left. \begin{array}{l} \bullet C(6) = 5 \\ \bullet R(6) = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow D(6) = R(6) - C(6) = 13.$

Au total, une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés est de: 1300 € (1800 € - 500 €).

2. b. Déterminons les quantités possibles de granulés en tonnes, pour que l'entreprise dégage un bénéfice:

L'entreprise dégage un bénéfice ssi:  $D(x) > 0$ .

Or:  $D(x) > 0$  ssi:  $R(x) - C(x) > 0$ , cad ssi:  $R(x) > C(x)$ .

Graphiquement,  $R(x) > C(x)$  quand:  $x \in ]2, 8; 13, 3[$ .

Au total, pour dégager un bénéfice, l'entreprise doit produire une quantité de granulés comprise entre: 2, 8 tonnes et 13, 3 tonnes.

## Partie B: Étude d'une fonction

1. a. Calculons  $g'$  pour tout  $x \in [1; 15]$ :

Ici: •  $g(x) = -0,6x + 4 + e^{-x+5}$

•  $Dg = [1; 15]$ .

Posons:  $g = g_1 + g_2$ , avec:  $g_1(x) = -0,6x + 4$  et  $g_2(x) = e^{-x+5}$ .

$g_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme, donc dérivable sur  $[1; 15]$ .

$g_2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur l'intervalle  $[1; 15]$ .

Par conséquent,  $g$  est dérivable sur  $[1; 15]$  comme somme de 2 fonctions dérivables sur  $[1; 15]$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $g'$  pour tout  $x \in [1; 15]$ .

Pour tout  $x \in [1; 15]$ :  $g'(x) = -0,6 - e^{-x+5}$ .

Au total:  $g'(x) = -0,6 - e^{-x+5}$ .

**1. b. Déduisons-en que  $g$  est décroissante sur  $[1;15]$ :**

$g$  est décroissante sur  $[1;15]$  ssi: pour tout  $x \in [1;15]$ ,  $g'(x) \leq 0$ .

$$g'(x) \leq 0 \text{ ssi: } -0,6 - e^{-x+5} \leq 0$$

$$\text{cad ssi: } e^{-x+5} \geq -0,6 \quad (a).$$

Or (a) est toujours vérifié car: pour tout  $x \in [1;15]$ ,  $e^{-x+5} > 0$ .

**Au total:**  $g$  est décroissante sur  $[1;15]$ .

**2. a. Dressons le tableau de variation de  $g$  sur  $[1;15]$ :**

Nous avons le tableau de variation suivant:

$x$	1	15
$g'$	-	
$g$	$a$	$b$

Avec: •  $a = g(1) \Rightarrow a = 3,4 + e^4 > 0$ ,

•  $b = g(15) \Rightarrow b = -5 + e^{-10} < 0$ .

**Au total:** • Nous venons de dresser le tableau de variation de  $g$  sur  $[1;15]$ .

• Arrondies à l'unité:  $g(1) \approx 58$  et  $g(15) \approx -5$ .

**2. b. Donnons la solution unique de l'équation  $g(x) = 0$  dans l'intervalle  $[1;15]$ :**

Comme  $g$  est strictement décroissante sur  $[1;15]$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution appartenant à  $[1;15]$ .

Soit  $\alpha$ , cette solution unique:  $\alpha \in [6;7]$ .

Par tâtonnement, on trouve, comme valeur arrondie de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près:  $\alpha \approx 6,9$ .

Au total, l'équation  $g(x)$  admet comme solution unique dans l'intervalle  $[1;15]$ :

$$\alpha \approx 6,9.$$

2. c. Déduisons-en le tableau de signe de  $g(x)$  sur  $[1;15]$ :

Nous avons le tableau de signes de  $g$  suivant:

$x$	1	$\alpha$	15
$g$	+	0	-

### Partie C: Application économique

1. Montrons que pour tout réel  $x \in [1;15]$ ,  $D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$ :

Nous savons que:  $D(x) = R(x) - C(x)$ .

Par conséquent:  $D(x) = 3x - (0,3x^2 - x + e^{-x+5})$

$$\Rightarrow D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}.$$

Au total, nous avons bien:  $D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$ .

2. Montrons que  $D'(x) = g(x)$ , pour tout réel  $x \in [1;15]$ :

D'après l'énoncé,  $D$  est dérivable sur  $[1;15]$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $D'$  pour tout  $x \in [1;15]$ .

Pour tout  $x \in [1;15]$ :  $D'(x) = -0,6x + 4 + e^{-x+5} \Rightarrow D'(x) = g(x)$ .

Au total: pour tout réel  $x \in [1;15]$ ,  $D'(x) = g(x)$ .

### 3. Déduisons-en le tableau de variation de $D$ sur $[1;15]$ :

Nous avons le tableau de variation suivant:

$x$	1	$\alpha = 6,9$	15
$D'$	+	0	-
$D$	$a$	$b$	$c$

Avec: •  $a = D(1) \Rightarrow a \approx -50,90$ ,

•  $b = D(6,9) \Rightarrow b \approx 13,17$ ,

•  $c = D(15) \Rightarrow c \approx -7,50$ .

Au total, nous venons de dresser le tableau de variation de  $D$  sur  $[1;15]$ .

#### 4. a. Déterminons la quantité de granulés pour que le bénéfice soit maximal:

La fonction  $D$  admet un maximum au point:  $M(\alpha; D(\alpha))$ .

Avec:  $\alpha = 6,9$  tonnes de granulés, l'entreprise dégagera un bénéfice maximal.

#### 4. b. Déterminons ce bénéfice maximal:

Soit  $D_{\max}$ , ce bénéfice maximal,  $D_{\max} = D(6,9)$ .

Or:  $D(6,9) \approx 13,17$  à  $10^{-2}$  près.

Au total, le bénéfice maximal dégagé par l'entreprise est de: 13170 €.