1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Études de Fonctions

Correction

☛ www.freemaths.fr

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-2x+6}$$

CORRECTION

Partie A: Étude graphique

1. Déterminons $f'(3)$:

Nous savons que la tangente à la courbe Cf, au point $x = 3$, passe par les points: $A(3; 4)$ et $B(4; 0)$.

Soit $y = ax + b$, l'équation de cette tangente.

" $a = f'(3)$ " est le coefficient directeur et est tel que:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \iff a = \frac{0 - 4}{4 - 3} \implies a = -4.$$

Au total, $f'(3)$ est tel que: $f'(3) = -4$.

2. Donnons le tableau de signe de f' sur l'intervalle $[0,7; 6]$:

Nous avons le tableau de signe de f' suivant:

x	0,7		1		2		6
f'		-	0	+	0	-	

Freemaths : Tous droits réservés

Partie B: Étude théorique

1. Montrons que $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)\,e^{-2x+6}$:

Ici: • $f(x) = (x^2 - 2x + 1)\,e^{-2x+6}$ **(u x v)**

• $Df = [\,0,7\,;6\,]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$ et $f_2(x) = e^{-2x+6}$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[\,0,7\,;6\,]$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction exponentielle, donc dérivable sur l'intervalle $[\,0,7\,;6\,]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[\,0,7\,;6\,]$ comme produit **$(f_1 \times f_2)$** de 2 fonctions dérivables sur $[\,0,7\,;6\,]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0,7\,;6\,]$.

Pour tout $x \in [\,0,7\,;6\,]$:

$$f'(x) = (2x - 2) \times e^{-2x+6} + (x^2 - 2x + 1) \times (-2) \times e^{-2x+6} \quad \textbf{(u' x v + u x v')}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)\,e^{-2x+6}.$$

Au total, pour tout $x \in [\,0,7\,;6\,]$: $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)\,e^{-2x+6}$.

2. a. Étudions le sens de variation de f sur $[\,0,7\,;6\,]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\,0,7\,;6\,]$.

Préalablement déterminons les solutions de l'équation: $-2x^2 + 6x - 4 = 0$.

$\Delta = 4 > 0$, d'où 2 solutions: • $x' = \dfrac{-6-2}{-4} \Rightarrow x' = 2$,

Freemaths : Tous droits réservés

• $x'' = \frac{-6+2}{-4} \Rightarrow x'' = 1.$

D'où les 3 cas:

• 1er cas: $f'(x) = 0.$

$f'(x) = 0$ ssi $(-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6} = 0$

$\Leftrightarrow (-2x^2 + 6x - 4) = 0$ (pour tout $x \in [0,7;6]$, $e^{-2x+6} > 0$)

cad: $x = 1$ ou $x = 2.$

• 2ème cas: $f'(x) < 0.$

$f'(x) < 0$ ssi $(-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6} < 0$

$\Leftrightarrow (-2x^2 + 6x - 4) < 0$ (pour tout $x \in [0,7;6]$, $e^{-2x+6} > 0$)

cad: $x \in [0,7;1[\cup]2;6]$.

• 3ème cas: $f'(x) > 0.$

$f'(x) > 0$ ssi $(-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6} > 0$

$\Leftrightarrow (-2x^2 + 6x - 4) > 0$ (pour tout $x \in [0,7;6]$, $e^{-2x+6} > 0$)

cad: $x \in]1;2[$.

Au total: • f est décroissante sur $[0,7;1[\cup]2;6]$,

(car sur $[0,7;1] \cup [2;6]$, $f'(x) \leqslant 0$)

• f est croissante sur $[1;2]$.

(car sur $[1;2]$, $f'(x) \geqslant 0$)

Freemaths : Tous droits réservés

2. b. Donnons le tableau de variation de f sur $[0,7;6]$:

Comme nous l'avons déjà dit: • f est décroissante sur $[0,7;1] \cup [2;6]$,

• f est croissante sur $[1;2]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	$0,7$		1		2		6
f'		-	0	+	0	-	
f	a	↘	b	↗	c	↘	d

Avec: • $a = f(0,7) \Rightarrow a = \dots$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 0$,

• $c = f(2) \Rightarrow c = e^2$,

• $d = f(6) \Rightarrow d = 25$.

3. a. Déterminons le plus grand intervalle sur lequel f est concave:

Soit $[e;f]$, l'intervalle recherché.

Ici: • $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6}$

• $f''(x) = g(x) = 2\,(2x^2 - 8x + 7)\, e^{-2x+6}$. (logiciel)

f est concave sur $[e;f]$ ssi: pour tout $x \in [e;f]$, $f''(x) \leqslant 0$.

Or le signe de f'' dépend du signe de: $2x^2 - 8x + 7$ (car $e^{-2x+6} > 0$).

Freemaths : Tous droits réservés

Les racines de l'équation $2x^2 - 8x + 7 = 0$ sont donc:

$x' = \frac{-\sqrt{2}+4}{2}$ et $x'' = \frac{\sqrt{2}+4}{2}$. (logiciel)

Dans ces conditions: $f''(x) \leqslant 0$ ssi $2x^2 - 8x + 7 \leqslant 0$,

cad: $x \in \left[\frac{-\sqrt{2}+4}{2}; \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right]$.

Au total: f est concave sur $[e; f] = \left[\frac{-\sqrt{2}+4}{2}; \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right]$.

3. b. Déterminons les points d'inflexion de f:

> Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand: $x = \frac{-\sqrt{2}+4}{2}$ et $x = \frac{\sqrt{2}+4}{2}$.

Au total, la courbe représentative de f admet 2 points d'inflexion:

$A = \left(\frac{-\sqrt{2}+4}{2}; f\left(\frac{-\sqrt{2}+4}{2}\right)\right)$ et $B\left(\frac{\sqrt{2}+4}{2}; f\left(\frac{\sqrt{2}+4}{2}\right)\right)$.

Freemaths : Tous droits réservés