1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Études de Fonctions

Correction

EXERCICE 4

[Amérique du Nord 2019]

Partie A: Lectures graphiques

1. Lisons graphiquement les valeurs de f (0), f' (0) et f' (11):

D'après l'énoncé:
- f est définie et dérivable sur [0 ; 30],
- A (0 ; - 11),
- B (5 ; 0),
- C (11 ; 12).

Dans ces conditions:

a. $f(0) = -11$. (ordonnée du point A)

b. $f'(11) = 0$, car la tangente au point C (11 ; 12) est parallèle à l'axe des abscisses. Et donc son coefficient directeur est nul.

c. $f'(0)$?

Nous savons que la tangente à la courbe Cf, au point $x = 0$, passe par les points: A (0 ; - 11) et B (5 ; 0).

Soit $y = ax + b$, l'équation de cette tangente.

" $\mathbf{a = f'(0)}$ " est le coefficient directeur et est tel que:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \iff a = \frac{0 - (-11)}{5 - 0} \quad \text{cad:} \quad a = f'(0) = \frac{11}{5}.$$

Au total: $f(0) = -11$, $f'(11) = 0$ et $f'(0) = \frac{11}{5}$.

2. L'affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifions:

Ici, F correspond à une primitive de f sur $[0; 30]$.

Donc pour tout $x \in [0; 30]$: $F'(x) = f(x)$.

Sur $[0; 11]$, le signe de f est tantôt négatif, tantôt positif.

Donc sur $[0; 11]$, la fonction F est d'abord décroissante puis est croissante.

Ainsi: L'affirmation est fausse.

Partie B: Étude d'une fonction

1. Justifions le résultat de la ligne 2 du logiciel:

Ici: • $f(x) = (x^2 - 11)\, e^{-0,2x}$ $(u \times e^v)$

• $Df = [0; 30]$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[0; 30]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; 30]$.

Pour tout $x \in [0; 30]$:

$f'(x) = (2x) \times (e^{-0,2x}) + (x^2 - 11) \times (-0,2e^{-0,2x})$ $(u' \times e^v + u \times v' \times e^v)$

$= (-0,2x^2 + 2x + 2,2) \times e^{-0,2x}$.

Au total, pour tout $x \in [0; 30]$: $f'(x) = (-0,2x^2 + 2x + 2,2) \times e^{-0,2x}$.

2. Etudions le signe de f' sur $[\,0\,;30\,]$ puis dressons le tableau des variations:

Préalablement, résolvons l'équation: $-0,2x^2 + 2x + 2,2 = 0$ (1).

$\Delta = 4 - 4 \times (-0,2) \times 2,2$ cad: $\Delta = 5,76 = (2,4)^2 > 0$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation (1) admet 2 solutions:

- $x_1 = \dfrac{-2 - 2,4}{-0,4}$ cad: $x_1 = 11$,
- $x_2 = \dfrac{-2 + 2,4}{-0,4}$ cad: $x_2 = -1$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [\,0\,;30\,]$:

- 1[er] cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $-0,2x^2 + 2x + 2,2 \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant 11$ ou $x \in [\,11\,; +\infty\,[$.

(car pour tout $x \in I\!R$, $e^{-0,2x} > 0$)

- 2[ème] cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $-0,2x^2 + 2x + 2,2 \geqslant 0$ cad ssi: $x \leqslant 11$ ou $x \in [\,0\,; 11\,]$.

(car pour tout $x \in I\!R$, $e^{-0,2x} > 0$)

Au total:
- f est croissante sur $[\,0\,; 11\,]$,
- f est décroissante sur $[\,11\,; +\infty\,[$.

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

x	0		11		30
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec:
- $a = f(0) = -11$,
- $b = f(11) = 110\ e^{-2,2}$,
- $c = f(30) = 889\ e^{-6}$.