

1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Dérivées de fonctions

Correction

 www.freemaths.fr

LE PROFIT MAXIMUM !

CORRECTION

1. Déterminons le prix d'une tonne de ce produit:

D'après l'énoncé, la recette totale est: $R(q) = 84q$.

Or d'une manière générale, la recette totale d'une entreprise s'écrit:

$$R(q) = P \times q.$$

Par identification, nous obtenons: $P = 84$ euros.

Au total, le prix d'une tonne de ce produit est égal à: $P = 84$ euros.

2. Écrivons le profit de l'entreprise:

Le profit ou bénéfice B de l'entreprise s'écrit:

$$\begin{aligned} B(q) &= \text{Recette totale} - \text{Coût total de production} \\ &= R(q) - C(q) \\ &= 84q - (q^3 - 30q^2 + 300q). \end{aligned}$$

Ainsi, le profit ou bénéfice de l'entreprise est: $B(q) = -q^3 + 30q^2 - 216q$.

3. Étudions les variations de la fonction B sachant que $q \in [0; 20]$:

Ici: • $\mathcal{D}_B = [0; 20]$,

• $\mathcal{D}_{B'} = [0; 20]$ car B est dérivable sur $[0; 20]$,

• pour tout $q \in [0; 20]$, nous avons donc: $B'(q) = -3q^2 + 60q - 216$.

Soit l'équation: $-3q^2 + 60q - 216 = 0$. ($aq^2 + bq + c = 0$)

$\Delta = b^2 - 4ac = 1008 > 0$. ($1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$)

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes qui sont:

• $q_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-60 - \sqrt{1008}}{-6} = 10 + \sqrt{28} > 0$




• $q_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-60 + \sqrt{1008}}{-6} = 10 - \sqrt{28} > 0$.

Distinguons 2 cas:

• $B'(q) \leq 0$ ssi $-3q^2 + 60q - 216 \leq 0$ cad ssi $q \in [0; q_2] \cup [q_1; 20]$

• $B'(q) \geq 0$ ssi $-3q^2 + 60q - 216 \geq 0$ cad ssi $q \in [q_2; q_1]$

Nous pouvons ainsi dresser le tableau de variations de B :

q	0	$q_2 = 10 - \sqrt{28}$	$q_1 = 10 + \sqrt{28}$	20	
$B'(q)$	-	0	+	0	-
$B(q)$				a	

, avec: • $a = B(10 + \sqrt{28})$.

- Ainsi:
- B est décroissante sur $[0; q_2] \cup [q_1; 20]$
 - B est croissante sur $[q_2; q_1]$.

4. Pour quelle valeur de q le bénéfice est-il maximal ?

Ici, nous obtenons deux extremums:

- un extremum au point C d'abscisse $q = q_2$.
- un extremum au point A d'abscisse $q = q_1$.

Seul le point A d'abscisse $q = q_1$, est un maximum car la fonction B est croissante sur $[q_2; q_1]$ et décroissante sur $[q_1; 20]$.

Donc le point A d'abscisse $q = 10 + \sqrt{28}$ est: un maximum.

Pour réaliser un profit maximum, l'entreprise doit donc vendre une quantité de produit égale à: $q = 10 + \sqrt{28}$ tonnes.

5. Déterminons alors ce bénéfice maximal:

Ce bénéfice ou profit maximal sera alors de: $q = B(10 + \sqrt{28})$ euros.