

1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Dérivées de fonctions

Correction

 www.freemaths.fr

SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

CORRECTION

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$:

a. Calculons sa dérivée f' :

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- f est dérivable sur \mathbb{R} . D'où: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2x + 2$.

b. Étudions le sens de variation de f :

Distinguons 2 cas:

- $f'(x) \leq 0$ ssi $2x + 2 \leq 0$ **cad** $x \leq -1$.
- $f'(x) \geq 0$ ssi $2x + 2 \geq 0$ **cad** $x \geq -1$.

Ainsi: • f est décroissante sur $] -\infty; -1]$


• f est strictement décroissante sur $] -\infty; -1[$

• f est croissante sur $[-1; +\infty[$

• f est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

c. Dressons le tableau de variations de f :

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

, avec: $f(-1) = -4$.

2. $f(x) = x^3 - 1$:

a. Calculons sa dérivée f' :

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- f est dérivable sur \mathbb{R} . D'où: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2$.

b. Étudions le sens de variation de f :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$.

$$(3x^2 \geq 0)$$

Ainsi: f est croissante sur \mathbb{R} .

c. Dressons le tableau de variations de f :

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$			

, avec: $f(0) = -1$.

3. $f(x) = x^3 - 9x$:

a. Calculons sa dérivée f' :

- $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.
- f est dérivable sur \mathbb{R} . D'où: $\mathcal{D}f' = \mathbb{R}$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 9$.

b. Étudions le sens de variation de f :

Distinguons 2 cas:

- $f'(x) \leq 0$ ssi $3x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 3$ **cad** $x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$
- $f'(x) \geq 0$ ssi $3x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3$ **cad** $x \in]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty[$.

Ainsi: • f est décroissante sur $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

• f est strictement décroissante sur $]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$

• f est croissante sur $]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty[$

• f est strictement croissante sur $]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$.

c. Dressons le tableau de variations de f :

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

, avec: • $f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$
• $f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$.

4. $f(x) = -x^3 + 2x$:

a. Calculons sa dérivée f' :

- $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.
- f est dérivable sur \mathbb{R} . D'où: $\mathcal{D}f' = \mathbb{R}$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -3x^2 + 2$.

b. Étudions le sens de variation de f :

Distinguons 2 cas:

- $f'(x) \leq 0$ ssi $-3x^2 + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{2}{3}$ cad $x \in]-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}] \cup [\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty[$.
- $f'(x) \geq 0$ ssi $-3x^2 + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{2}{3}$ cad $x \in [-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}]$.

Ainsi: • f est décroissante sur $] -\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}] \cup [\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty[$

• f est strictement décroissante sur $] -\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}[\cup] \sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty[$

- f est croissante sur $[-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}]$
- f est strictement croissante sur $]-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}[$.

c. Dressons le tableau de variations de f :

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		$f(-\sqrt{\frac{2}{3}})$	$f(\sqrt{\frac{2}{3}})$		

, avec: • $f(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

• $f(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

5. $f(x) = x^3 - 6x$:

a. Calculons sa dérivée f' :

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- f est dérivable sur \mathbb{R} . D'où: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 6$.

b. Étudions le sens de variation de f :

Distinguons 2 cas:

- $f'(x) \leq 0$ ssi $3x^2 - 6 \leq 0 \iff x^2 \leq 2$ cad $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

- $f'(x) \geq 0$ ssi $3x^2 - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 2$ **cad** $x \in]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$.

Ainsi: • f est décroissante sur $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

- f est strictement décroissante sur $] -\sqrt{2}; \sqrt{2} [$

- f est croissante sur $] -\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty [$

- f est strictement croissante sur $] -\infty; -\sqrt{2} [\cup] \sqrt{2}; +\infty [$.

c. Dressons le tableau de variations de f :

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$f(-\sqrt{2})$		$f(\sqrt{2})$	

, avec: • $f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

• $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$.

6. $f(x) = x^3 + 4x$:

a. Calculons sa dérivée f' :

- $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

- f est dérivable sur \mathbb{R} . D'où: $\mathcal{D}f' = \mathbb{R}$.

- Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 + 4$.

b. Étudions le sens de variation de f :


Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

$$(3x^2 \geq 0 \text{ et } 4 > 0)$$

Ainsi: f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

c. Dressons le tableau de variations de f :

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

7. $f(x) = -x(3x^2 + 20)$:

Notons que: $f(x) = -x(3x^2 + 20) \Leftrightarrow f(x) = -3x^3 - 20x$.

a. Calculons sa dérivée f' :

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- f est dérivable sur \mathbb{R} . D'où: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -9x^2 - 20$.

b. Étudions le sens de variation de f :


Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$.

$$(-9x^2 \leq 0 \text{ et } -20 < 0)$$

Ainsi: f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

c. Dressons le tableau de variations de f :

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$		

8. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$, définie sur $[-2; 4]$:

a. Calculons sa dérivée f' :

- $\mathcal{D}_f = [-2; 4]$ ici.
- f est dérivable sur \mathbb{R} , donc sur $[-2; 4]$. D'où: $\mathcal{D}_{f'} = [-2; 4]$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in [-2; 4]$: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$.

b. Étudions le sens de variation de f :

Notons que: $6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$.

Distinguons 2 cas:

- $f'(x) \leq 0$ ssi $6(x+1)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \leq 0$ **cad** $x \in [-1; 2]$
- $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geq 0$ **cad** $x \in [-2; -1] \cup [2; 4]$.

Ainsi: • f est décroissante sur $[-1; 2]$

- f est strictement décroissante sur $] -1; 2 [$
- f est croissante sur $[-2; -1] \cup [2; 4]$
- f est strictement croissante sur $[-2; -1 [\cup] 2; 4]$.

c. Dressons le tableau de variations de f :

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	-2	-1	2	4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$f(-1)$	$f(2)$		

, avec: • $f(-1) = 13$
• $f(2) = -14$.

10. $f(x) = \frac{1}{x-1}$:

a. Calculons sa dérivée f' :

- $\mathcal{D}f = \mathbb{R} - \{1\}$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$. D'où: $\mathcal{D}f' = \mathbb{R} - \{1\}$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$: $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$.

b. Étudions le sens de variation de f :


Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $f'(x) < 0$.

$$(-1 < 0 \text{ et } (x-1)^2 > 0)$$

Ainsi: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

c. Dressons le tableau de variations de f :

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$			

11. $f(x) = \frac{x+1}{2x-6}$:

a. Calculons sa dérivée f' :

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{3\}$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{3\}$. D'où: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} - \{3\}$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{3\}$:

$$f'(x) = \frac{(1) \times (2x-6) - (x+1) \times (2)}{(2x-6)^2}$$

$$= \frac{-8}{(2x-6)^2}$$

b. Étudions le sens de variation de f :

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $f'(x) < 0$.

$$(-8 < 0 \text{ et } (2x - 6)^2 > 0)$$

Ainsi: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R} - \{3\}$.

c. Dressons le tableau de variations de f :

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$			

12. $f(x) = \frac{3x + 2}{x + 4}$, définie sur $[0; 2]$:

a. Calculons sa dérivée f' :

- $\mathcal{D}_f = [0; 2]$ ici.
- f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-4\}$, donc sur $[0; 2]$. D'où: $\mathcal{D}_{f'} = [0; 2]$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in [0; 2]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3) \times (x + 4) - (3x + 2) \times (1)}{(x + 4)^2} \\ &= \frac{10}{(x + 4)^2}. \end{aligned}$$

b. Étudions le sens de variation de f :

Pour tout $x \in [0; 2]$, $f'(x) > 0$.

$$(10 > 0 \text{ et } (x + 4)^2 > 0)$$

Ainsi: f est strictement croissante sur $[0; 2]$.

c. Dressons le tableau de variations de f :

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	0	2
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

13. $f(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x}$, définie sur $]0; +\infty[$:

a. Calculons sa dérivée f' :

- $\mathcal{D}f =]0; +\infty[$ ici.
- f est dérivable sur \mathbb{R}^* , donc sur $]0; +\infty[$. D'où: $\mathcal{D}f' =]0; +\infty[$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$.

b. Étudions le sens de variation de f :

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

$$(2 > 0 \text{ et } \frac{1}{x^2} > 0)$$

Ainsi: f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

c. Dressons le tableau de variations de f :

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	