

# 1re

# MATHÉMATIQUES

## Enseignement de Spécialité

## Dérivées de fonctions

**Correction**

 [www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# CALCUL DE DÉRIVÉES

5

## CORRECTION

D'après le cours, nous savons que:

- $f(x) = a \cdot x^n + b$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et:  $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{(n-1)}$ . ( $n \in \mathbb{N}^*$ )
- $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$ .

1. Calculons la dérivée de la fonction  $f(x) = 3x(4x + 2)$ :

- Le domaine de définition de  $f$  est:  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .
- Le domaine de dérivabilité de  $f$  est:  $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ .
- **Méthode 1:** On développe  $f$ .

$$f(x) = 3x(4x + 2) = 12x^2 + 6x, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

$$f \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et: } f'(x) = 24x + 6.$$

- **Méthode 2:** On a recours à la formule  $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$ .

$$\text{Ici: } f(x) = (3x) \times (4x + 2).$$

$$\text{Posons: } U(x) = 3x \text{ et } V(x) = 4x + 2.$$

$$\text{Dans ces conditions, pour tout } x \in \mathbb{R}: U'(x) = 3 \text{ et } V'(x) = 4.$$

$$f \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et: } f'(x) = U'(x) \times V(x) + U(x) \times V'(x) \\ = (3) \times (4x + 2) + (3x) \times (4) \\ = 24x + 6.$$

2. Calculons la dérivée de la fonction  $f(x) = (-x + 6)(3x - 2)$ :

- Le domaine de définition de  $f$  est:  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .
- Le domaine de dérivabilité de  $f$  est:  $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ .
- **Méthode 1:** On développe  $f$ .

$$f(x) = (-x + 6)(3x - 2) = -3x^2 + 20x - 12, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

$$f \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et: } f'(x) = -6x + 20.$$

- **Méthode 2:** On a recours à la formule  $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$ .

$$\text{Ici: } f(x) = (-x + 6) \times (3x - 2).$$

$$\text{Posons: } U(x) = -x + 6 \text{ et } V(x) = 3x - 2.$$

$$\text{Dans ces conditions, pour tout } x \in \mathbb{R}: U'(x) = -1 \text{ et } V'(x) = 3.$$

$$f \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et: } f'(x) = U'(x) \times V(x) + U(x) \times V'(x) \\ = (-1) \times (3x - 2) + (-x + 6) \times (3) \\ = -6x + 20.$$

3. Calculons la dérivée de la fonction  $f(x) = -x^2(-x^3 + 21x + 1)$ :

- Le domaine de définition de  $f$  est:  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .

- Le domaine de dérivabilité de  $f$  est:  $\mathcal{D}f' = \mathbb{R}$ .

- **Méthode 1:** On développe  $f$ .

$$f(x) = -x^2(-x^3 + 21x + 1) = x^5 - 21x^3 - x^2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

$$f \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et: } f'(x) = 5x^4 - 63x^2 - 2x.$$

- **Méthode 2:** On a recours à la formule  $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$ .

$$\text{Ici: } f(x) = (-x^2) \times (-x^3 + 21x + 1).$$

$$\text{Posons: } U(x) = -x^2 \text{ et } V(x) = -x^3 + 21x + 1.$$

$$\text{Dans ces conditions, pour tout } x \in \mathbb{R}: U'(x) = -2x \text{ et } V'(x) = -3x^2 + 21.$$

$$\begin{aligned} f \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et: } f'(x) &= U'(x) \times V(x) + U(x) \times V'(x) \\ &= (-2x) \times (-x^3 + 21x + 1) + (-x^2) \times (-3x^2 + 21) \\ &= 5x^4 - 63x^2 - 2x. \end{aligned}$$

4. Calculons la dérivée de la fonction  $f(x) = (-3x^2 + 5x - 4)(2x^4 + x^3 - x + 30)$ :

- Le domaine de définition de  $f$  est:  $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$ .

- Le domaine de dérivabilité de  $f$  est:  $\mathcal{D}f' = \mathbb{R}$ .

- **Méthode 1:** On développe  $f$ .

$$f(x) = (-3x^2 + 5x - 4)(2x^4 + x^3 - x + 30)$$

$$= -6x^6 + 7x^5 - 3x^4 - x^3 - 95x^2 + 154x - 120, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

$f$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et:

$$f'(x) = -36x^5 + 35x^4 - 12x^3 - 3x^2 - 190x + 154.$$

- **Méthode 2:** On a recours à la formule  $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$ .

Ici:  $f(x) = (-3x^2 + 5x - 4) \times (2x^4 + x^3 - x + 30)$ .

Posons:  $U(x) = -3x^2 + 5x - 4$  et  $V(x) = 2x^4 + x^3 - x + 30$ .

Dans ces conditions, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :

$$U'(x) = -6x + 5 \text{ et } V'(x) = 8x^3 + 3x^2 - 1.$$

$f$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et:

$$\begin{aligned} f'(x) &= U'(x) \times V(x) + U(x) \times V'(x) \\ &= (-6x + 5) \times (2x^4 + x^3 - x + 30) + (-3x^2 + 5x - 4) \times (8x^3 + 3x^2 - 1) \\ &= -36x^5 + 35x^4 - 12x^3 - 3x^2 - 190x + 154. \end{aligned}$$

5. Calculons la dérivée de  $f(x) = (3x^4 - 6x^2)(x^9 - 14x^7 + 50)$ :

- Le domaine de définition de  $f$  est:  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .
- Le domaine de dérivabilité de  $f$  est:  $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ .
- **Méthode 1:** On développe  $f$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x^4 - 6x^2)(x^9 - 14x^7 + 50) \\ &= 3x^{13} - 48x^{11} + 84x^9 + 150x^4 - 300x^2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$f$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et:

$$f'(x) = 39x^{12} - 528x^{10} + 756x^8 + 600x^3 - 600x.$$

- **Méthode 2:** On a recours à la formule  $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$ .

Ici:  $f(x) = (3x^4 - 6x^2) \times (x^9 - 14x^7 + 50)$ .

Posons:  $U(x) = 3x^4 - 6x^2$  et  $V(x) = x^9 - 14x^7 + 50$ .

Dans ces conditions, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :

$$U'(x) = 12x^3 - 12x \text{ et } V'(x) = 9x^8 - 98x^6.$$

$f$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et:

$$\begin{aligned} f'(x) &= U'(x) \times V(x) + U(x) \times V'(x) \\ &= (12x^3 - 12x) \times (x^9 - 14x^7 + 50) + (3x^4 - 6x^2) \times (9x^8 - 98x^6) \\ &= 39x^{12} - 528x^{10} + 756x^8 + 600x^3 - 600x. \end{aligned}$$

6. Calculons la dérivée de  $f(x) = (x^n + 30x^3)(3x^2 - 7x + 3)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ :

- Le domaine de définition de  $f$  est:  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .
- Le domaine de dérivabilité de  $f$  est:  $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ .
- **Méthode 1:** On développe  $f$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^n + 30x^3)(3x^2 - 7x + 3) \\ &= 3x^{(n+2)} - 7x^{(n+1)} + 3x^n + 90x^5 - 210x^4 + 90x^3, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$f$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et:

$$f'(x) = (3n + 6)x^{(n+1)} - (7n + 7)x^n + 3nx^{(n-1)} + 450x^4 - 840x^3 + 270x^2.$$

- **Méthode 2:** On a recours à la formule  $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$ .

Ici:  $f(x) = (x^n + 30x^3) \times (3x^2 - 7x + 3)$ .

Posons:  $U(x) = x^n + 30x^3$  et  $V(x) = 3x^2 - 7x + 3$ .

Dans ces conditions, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :

$$U'(x) = nx^{(n-1)} + 90x^2 \text{ et } V'(x) = 6x - 7.$$

$f$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et:

$$\begin{aligned} f'(x) &= U'(x) \times V(x) + U(x) \times V'(x) \\ &= (nx^{(n-1)} + 90x^2) \times (3x^2 - 7x + 3) + (x^n + 30x^3) \times (6x - 7) \\ &= (3n + 6)x^{(n+1)} - (7n + 7)x^n + 3nx^{(n-1)} + 450x^4 - 840x^3 + 270x^2. \end{aligned}$$