1^{re} Technologique Mathématiques

(STI2D et STL)

Fonctions Cosinus & Sinus

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'AMPOULE

CORRECTION

Partie A: Modélisation de la forme de l'ampoule

1. a. Déterminons f':

Ici: • $f(x) = a + b\sin\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$, **avec: $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$**

• $Df = [0; 4]$.

Posons: $f = f_1 + f_2$, avec: $f_1(x) = a$ et $f_2(x) = b\sin\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[0; 4]$.

f_2 est dérivable sur l'intervalle $[0; 4]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[0; 4]$ comme somme $\boldsymbol{(f_1 + f_2)}$ de deux fonctions dérivables sur $[0; 4]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; 4]$.

Pour tout $x \in [0; 4]$:

$f'(x) = \frac{\pi}{4} b\cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$. $\quad$ $\left((\sin[U(x)])' = U'(x)\cos[U(x)] \right)$

Au total, pour tout $x \in [0; 4]$: $f'(x) = \frac{\pi}{4} b\cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$.

1. b. Déterminons la valeur du réel c:

Les points B et C ont pour coordonnées respectives: B (0; 1) et C (4; 3).

Comme les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction f sont parallèles à l'axe des abscisses, nous avons:

$$f'(B) = 0 \text{ et } f'(C) = 0.$$

Or: $\begin{cases} f'(B) = 0 \\ f'(C) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\pi}{4} b \cos(c) = 0 \\ \frac{\pi}{4} b \cos(c + \pi) = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \cos(c) = 0 \\ \cos(c + \pi) = 0 \end{cases}, \text{ car: } b \neq 0$$

$$\iff \begin{cases} \cos(c) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \cos(c + \pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ c = -\frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Comme $c \in [0; \frac{\pi}{2}]$, nous retiendrons: $c = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, la valeur du réel c est: $c = \frac{\pi}{2}$.

Et nous pouvons écrire pour tout $x \in [0; 4]$: $f(x) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right)$.

2. Déterminons les réels a et b:

Comme pour tout x [0; 4], $f(x) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right)$, nous pouvons écrire:

$$\begin{cases} f(B) = 1 \\ f(C) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ a + b\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Au total, les valeurs des réels a et b sont: $a = 2$ et $b = -1$.

Et nous pouvons écrire pour tout réel x de l'intervalle [0; 4]:

$$f(x) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right) \text{ cad: } f(x) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

Partie B: Approximation du volume de l'ampoule

1. Calculons le volume du cylindre de section le rectangle ABFG:

Nous savons que:
- le volume d'un cylindre est donné par la formule $\pi r^2 h$, r étant le rayon du disque de base et h, la hauteur;
- $r = 1$ et $h = 1$.

Dans ces conditions, le volume du cylindre est: $V_c = \pi$.

Au total, le volume du cylindre est: $V_c = \pi$.

2. Calculons le volume de la demi-sphère de section le disque de diamètre [CE]:

Nous savons que: • le volume d'une boule de rayon r est donnée par la formule $\frac{4}{3}\pi r^3$;

• $r = 3$.

Dans ces conditions, le volume de la boule de rayon $r = 3$ est:

$$V_B = \frac{4}{3}\pi\,(3)^3 = 36\pi.$$

D'où, le volume de la demi-sphère est: $V_S = \frac{V_B}{2} = 18\pi.$

Au total, le volume de la demi-sphère est: $V_S = 18\pi$.

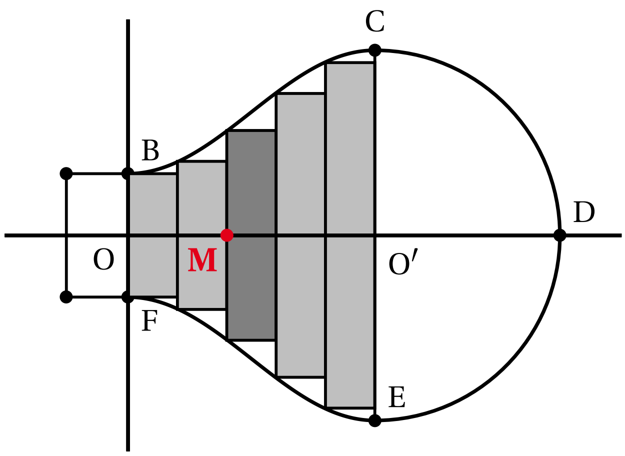
3. a. a1. Calculons le volume du troisième cylindre grisé sachant que $n = 5$:

Ici: • la hauteur h du troisième cylindre est: $h = \frac{OO'}{5} = \frac{4}{5}$;

• soit le point M (voir graphique) dont les coordonnées sont respectivement:

• $x_M = \frac{4}{5} \times 2 = \frac{8}{5}$

• $y_M = 0$;



- le rayon du troisième cylindre est: $r = f(x_M) = f\left(\frac{8}{5}\right) = 2 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Dans ces conditions, le volume du troisième cylindre est:

$$V_{C3} = \pi r^2 h \quad \text{cad:} \quad V_{C3} = \pi \times \left(2 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2 \times \frac{4}{5}.$$

Ainsi: $V_{C3} = \frac{4\pi}{5}\left(2 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2$.

3. a. a2. Une valeur arrondie à 10^{-2} de V_{C3} ?

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons: $V_{C3} \approx 7,19$, à 10^{-2} près.

Ainsi, une valeur arrondie à 10^{-2} de V_{C3} est: 7, 19 unités de volume.

3. b. Recopions et complétons l'algorithme, sachant que $n \in \mathbb{N}^*$:

Dans le cas général, nous avons pour tout $n \in -^*$:

- comme hauteur: $h = \frac{4}{n}$;
- comme point M, le point de coordonnées:
  - $x_M = \frac{4}{n} \times k$ (k allant de 0 à (n - 1))
  - $y_M = 0$;
- comme rayon: $r = f(x_M) = f\left(\frac{4}{n} \times k\right) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{n} \times k\right)$.

Dans ces conditions, le volume de chacun des n cylindres est:

$$V_{Cn} = \pi r^2 h \quad \text{cad:} \quad V_{Cn} = \pi \times \left(2 - \cos\left(\frac{\pi}{n} \times k\right)\right)^2 \times \frac{4}{n}.$$

Ainsi: $V_{C_n} = \frac{4\pi}{n}\left(2 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2, n \in \mathbb{N}^*.$

Et l'algorithme recopié et complété s'écrit:

1	$V \leftarrow 0$
2	Pour k allant de 0 à n - 1:
3	$V \leftarrow V + \frac{4\pi}{n}\left(2 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2$
4	Fin Pour