

www.freemaths.fr

1^{re}

Technologique Mathématiques

Suites, Exercices de Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LES CONTRATS SOUSCRITS

CORRECTION

1. a. Justifions que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 1,14 U_n - 7$:

- D'après l'énoncé, l'entreprise dénombrait 120 contrats souscrits en 2017.

D'où: $U_0 = 120$ contrats souscrits.

- De plus, chaque année, le directeur de cette société note que:
 - 14% de contrats supplémentaires sont souscrits,
 - et, 7 contrats sont résiliés.

Soient: • U_{n+1} , le nombre de contrats souscrits l'année 2017 + (n + 1),

• U_n , le nombre de contrats souscrits l'année 2017 + (n).

Pour tout entier naturel n , le nombre de contrats souscrits l'année 2017 + (n + 1) est égal à celui U_n augmenté de 14% et diminué de 7 contrats.

Pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n + 14\% U_n - 7 \Rightarrow U_{n+1} = 1,14 U_n - 7.$$

Au total, nous avons bien: $U_{n+1} = 1,14 U_n - 7$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. b. Donnons une estimation du nombre de contrats d'entretien en 2018:

Pour répondre à cette question, il s'agit de calculer U_1 .

$$U_1 = (1 + 14\%) U_0 - 7 \Leftrightarrow U_1 = 1,14 \times 120 - 7$$

$$\Rightarrow U_1 = 129,8 \approx 130 \text{ contrats souscrits.}$$

Ainsi, une estimation du nombre de contrats d'entretien souscrits en 2018 est d'environ: 130.

2. a. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```

n ← 0
u ← 120
Tant que u ≤ 190
    | n ← n + 1
    | u ← 1,14 x u - 7
Fin Tant que
Afficher 2017 + n
  
```

2. b. Déterminons l'année affichée en sortie de l'algorithme et interprétons:

Pour répondre à cette question, nous allons dresser un tableau:

n	0	1	2	3	4	5	6
U_n	120	130	141	154	168	185	204

Nous nous arrêtons quand $n = 6$ car c'est à partir de cette année-là que le nombre de contrats souscrits dépassera 190.

En effet: 204 contrats souscrits > 190 contrats souscrits.

Ainsi, la valeur affichée en sortie de cet algorithme est de:

$$204 \text{ contrats souscrits en } 2017 + 6 = 2023.$$

En d'autres termes, à partir de l'année 2023, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel car le nombre de contrats souscrits dépassera 190.

3. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme V_0 que l'on précisera:

$$\begin{aligned} V_n = U_n - 50 &\Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 50 \\ &\Leftrightarrow V_{n+1} = (1,14 U_n - 7) - 50 \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 50 \Rightarrow V_0 = 120 - 50 = 70 \text{ et } U_n = V_n + 50.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\Leftrightarrow V_{n+1} = (1,14 [V_n + 50] - 7) - 50 \\ &\Rightarrow V_{n+1} = 1,14 V_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,14$ et de premier terme $V_0 = 70$.

3. b. b1. Exprimons V_n en fonction de n :

Comme $V_{n+1} = 1,14 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (1,14)^n, \text{ avec: } V_0 = 70.$$

3. b. b2. Déduisons-en que, pour tout entier naturel n , $U_n = 70 \times 1,14^n + 50$:

$$\text{Nous savons que: } * V_n = 70 \times (1,14)^n$$

$$* U_n = V_n + 50.$$

$$\text{D'où: } U_n = 70 \times (1,14)^n + 50.$$