www.freemaths.fr

1re Technologique Mathématiques

(STI2D)

Nombres Complexes
Équations du Premier Degré

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉQUATION DU 1^er DEGRÉ

3

CORRECTION

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (1):

Soit l'équation: $(4-2i)z - \dfrac{1+i}{1-i} = 2\sqrt{3} + 1 + i(1-\sqrt{3})$.

$$(4-2i)z - \frac{1+i}{1-i} = 2\sqrt{3} + 1 + i(1-\sqrt{3}) \iff (2-6i)z - (1+i) = \sqrt{3} + 2 - 3\sqrt{3}i$$

$$\iff (2-6i)(x+iy) - 1 - i = \sqrt{3} + 2 - 3\sqrt{3}i$$

$$\iff (2x+6y-3-\sqrt{3}) + i(2y-6x-1+3\sqrt{3}) = 0$$

$$\iff \begin{cases} 2x+6y-3-\sqrt{3}=0 \\ 2y-6x-1+3\sqrt{3}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x+6y=3+\sqrt{3} \\ -6x+2y=1-3\sqrt{3} \end{cases}$$

cad $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

En conclusion la solution est: $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \left(\frac{1}{2}\right)$.

2. a. Calculons z_0^2:

Nous savons que: $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \left(\frac{1}{2}\right)$.

Dans ces conditions: $z_0^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \left(\frac{1}{2}\right)\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$$= \frac{3}{4} + i \times \frac{\sqrt{3}}{4} + i \times \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} + i \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ainsi: $z_0^2 = \frac{1}{2} + i \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. b. Vérifions que $z_0^3 = i$:

$z_0^3 = z_0^2 \times z$.

$$= \left(\frac{1}{2} + i \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + i \times \left(\frac{1}{4}\right) + i \times \left(\frac{3}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= i.$$

Ainsi, nous avons bien: $z_0^3 = i$.

3. Déduisons-en z_0^{12} et z_0^{2016}:

- $z_0^{12} = (z_0^3)^4$

$= i^4$

$= i^2 \times i^2$

$= 1.$

- $z_0^{2016} = (z_0^3)^{672}$

$= i^{672}$

$= (i^2)^{336}$

$= (-1)^k$, k étant un nombre impair

$= -1.$

En conclusion: $z_0^{12} = 1$ et $z_0^{2016} = -1.$