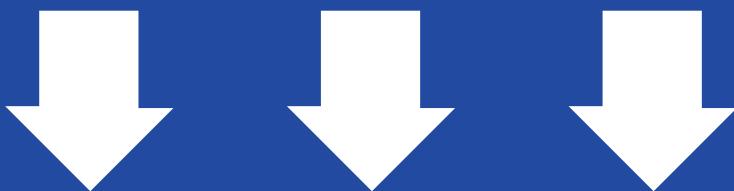


1^{re}
Technologique
Mathématiques
(STI2D)

Nombres Complexes
Équations du Premier Degré



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉQUATION DU 1^{er} DEGRÉ

3

CORRECTION

1. Résolvons dans \mathbb{C} l'équation (1):

Soit l'équation: $(4 - 2i)z - \frac{1+i}{1-i} = 2\sqrt{3} + i(1-\sqrt{3})$.

$$(4 - 2i)z - \frac{1+i}{1-i} = 2\sqrt{3} + i(1-\sqrt{3}) \Leftrightarrow (2-6i)z - (1+i) = \sqrt{3} + 2 - 3\sqrt{3}i$$

$$\Leftrightarrow (2-6i)(x+iy) - 1 - i = \sqrt{3} + 2 - 3\sqrt{3}i$$

$$\Leftrightarrow (2x+6y-3-\sqrt{3}) + i(2y-6x-1+3\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y-3-\sqrt{3}=0 \\ 2y-6x-1+3\sqrt{3}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y=3+\sqrt{3} \\ -6x+2y=1-3\sqrt{3} \end{cases}$$

cad

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

En conclusion la solution est: $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \left(\frac{1}{2}\right)$.

2 a. Calculons z_0^2 :

Nous savons que: $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \left(\frac{1}{2}\right)$.

Dans ces conditions: $z_0^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \left(\frac{1}{2}\right)\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$$= \frac{3}{4} + i \times \frac{\sqrt{3}}{4} + i \times \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} + i \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ainsi: $z_0^2 = \frac{1}{2} + i \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2 b. Vérifions que $z_0^3 = i$:

$$z_0^3 = z_0^2 \times z.$$

$$= \left(\frac{1}{2} + i \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + i \times \left(\frac{1}{4}\right) + i \times \left(\frac{3}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= i.$$

Ainsi, nous avons bien: $z_0^3 = i$.

3. Déduisons-en z_0^{12} et z_0^{2016} :

$$\bullet z_0^{12} = (z_0^3)^4$$

$$= i^4$$

$$= i^2 \times i^2$$

$$= I.$$

$$\bullet z_0^{2016} = (z_0^3)^{672}$$

$$= i^{672}$$

$$= (i^2)^{336}$$

$$= (-I)^k, k \text{ étant un nombre impair}$$

$$= -I.$$

En conclusion: $z_0^{12} = I$ et $z_0^{2016} = -I$.