

www.freemaths.fr

1^{re}

Technologique Mathématiques

Études de Fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UNE CUVE MÉTALLIQUE

CORRECTION

1. a. Montrons que l'aire du carré ABCD est $(3 - 2x)^2$:

D'après le cours, nous savons que l'aire d'un carré de côté " c " est:

$$A = c \times c, \text{ " côté } \times \text{ côté "}$$

Or ici: $c = 3 - x - x$

$$= 3 - 2x, \text{ avec } x \in [0; 1,5]$$

D'où l'aire du carré ABCD est donc bien: $A = c \times c = (3 - 2x)^2$ mètres.

1. b. Montrons que le volume de la cuve est $V(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$:

Le volume de la cuve est égal à: $A \times x$.

Dans ces conditions, le volume V de la cuve est:

$$V(x) = (3 - 2x)^2 \times x$$

$$= (9 + 4x^2 - 12x) \times x$$

$$= 4x^3 - 12x^2 + 9x, \text{ avec } x \in [0; 1,5]$$

Ainsi, le volume de la cuve est bien: $V(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$.

2. a. Calculons V' sur $[0; 1,5]$, et vérifions que $V'(0,5) = 0$ et $V'(1,5) = 0$:

- La fonction V est dérivable sur $[0; 1,5]$.

D'où nous pouvons calculer V' sur $[0; 1,5]$:

$$V'(x) = 12x^2 - 24x + 9, \text{ pour tout } x \in [0; 1,5].$$

- $V'(0,5) = 12 \times (0,5)^2 - 24 \times (0,5) + 9 = 0$

- $V'(1,5) = 12 \times (1,5)^2 - 24 \times (1,5) + 9 = 0$.

Au total, pour tout $x \in [0; 1,5]$, nous avons: $V'(x) = 12x^2 - 24x + 9$

et $V'(0,5) = V'(1,5) = 0$.

$0,5$ et $1,5$ sont donc les racines de la fonction V' .

2. b. Déduisons-en les variations de V sur $[0; 1,5]$:

Nous allons procéder en deux étapes.

Étape 1: on détermine le signe de V' .

V' admet deux racines: $x_1 = 0,5$ et $x_2 = 1,5$.

Et nous pouvons alors écrire, pour tout $x \in [0; 1,5]$:

$$V'(x) = 12(x - 0,5)(x - 1,5).$$

D'où le tableau de signe de V' sur $[0; 1,5]$ est:

x	0	$0,5$	$1,5$
$x - 0,5$	$-$	0	$+$
$x - 1,5$	$-$	$-$	0
$V'(x)$	$+$	0	$-$

Ainsi le signe de V' sur $[0; 1,5]$ est:

- strictement positif sur $[0; 0,5[$
- nul si $x = 0$ ou $x = 1,5$
- strictement négatif sur $]0,5; 1,5[$.

Étape 2: on dresse le tableau de variations de V .

Le tableau de variations de V sur $[0; 1,5]$ est le suivant:

x	0	$0,5$	$1,5$
$V'(x)$	$+$	0	$-$
$V(x)$	a	b	c

, avec:

- $a = 0 \text{ m}^3$
- $b = 2 \text{ m}^3$
- $c = 0 \text{ m}^3$.

Ainsi:

- V est croissante sur $[0; 0,5]$
- V est décroissante sur $[0,5; 1,5]$.

2. c. Déterminons pour quelle valeur de x le volume de la cuve est maximal:

La fonction V est croissante sur $[0; 0,5]$ et décroissante sur $[0,5; 1,5]$.

Elle présente donc un maximum quand: $x = 0,5$ mètre.

$$V(0,5) = b = 2 \text{ m}^3.$$

Ainsi, le volume maximal de la cuve est de 2 m^3 , et cela se produit quand le nombre $x = 0,5$ mètre.