1re Technologique Mathématiques

Études de Fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LES COURGETTES

CORRECTION

1. Vérifions que le bénéfice $B(x)$ est $B(x) = -x^3 + 15x^2 + 72x + 650$:

Nous savons que:
- le prix d'une tonne de courgettes est de **150 €**
- le coût total de production est $C(x) = x^3 - 15x^2 + 78x - 650$.

De plus, le bénéfice réalisé par la vente de x tonnes de courgettes est:

$$B(x) = R(x) - C(x)$$

$$= \text{Recette totale} - \text{Coût total}.$$

Or:
- $R(x) = P \times x$ cad $R(x) = 150 \times x$
- $C(x) = x^3 - 15x^2 + 78x - 650$.

D'où: $B(x) = 150x - (x^3 + 15x^2 + 78x - 650)$

$$= -x^3 + 15x^2 + 72x + 650.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0; 16]$, nous avons bien: $B(x) = -x^3 + 15x^2 + 72x + 650$.

2. Calculons B':

La fonction B est dérivable sur $[0; 16]$.

D'où, nous pouvons calculer B' sur [0; 16]:

$$B'(x) = -3x^2 + 30x + 72, \text{ pour tout } x \in [0; 16].$$

Ainsi, la dérivée de la fonction B, pour tout $x \in [0; 16]$ est:

$$B'(x) = -3x^2 + 30x + 72.$$

3. Montrons que $B'(x) = -3(x+2)(x-12)$ pour tout $x \in [0; 16]$:

Pour tout $x \in [0; 16]$:

$$\begin{aligned} -3(x+2)(x-12) &= -3(x^2 - 12x + 2x - 24) \\ &= -3x^2 + 36x - 6x + 72 \\ &= -3x^2 + 30x + 72 \\ &= B'(x). \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in [0; 16]$, nous avons bien: $B'(x) = -3(x+2)(x-12)$.

4. a. Étudions le signe de $B'(x)$ sur [0; 16]:

Distinguons 3 cas:
- $B'(x) > 0$ ssi $x \in [0; 12[$
- $B'(x) = 0$ ssi $x = 12$, car $x \in [0; 16]$
- $B'(x) < 0$ ssi $x \in]12; 16]$.

Ainsi le signe de B' sur [0; 16] est:
- strictement positif sur [0; 12]
- nul si $x = 12$
- strictement négatif sur] 12; 16].

4. b. Déduisons-en le tableau de variation de la fonction B:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0		12		16
$B'(x)$		+	0	-	
$B(x)$	a	↗	b	↘	c

, avec:

- $a = B(0) = 650$
- $b = B(12) = 1946$
- $c = B(16) = 1546$.

Ainsi:
- f est croissante sur $[0; 12]$
- f est décroissante sur $[12; 16]$.

5. **Déterminons la quantité de courgettes permettant à l'entreprise de dégager un bénéfice maximal et calculons ce bénéfice:**

La fonction f est croissante sur $[0; 12]$ et décroissante sur $[12; 16]$.

Elle présente donc un maximum quand: $x = 12$ tonnes de courgettes.

$B(12) = b = 1946$ €.

Ainsi, le bénéfice sera maximal quand la production de courgettes sera de 12 tonnes et le profit réalisé sera de 1946 €.