1re Technologique Mathématiques

Études de Fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'AIRE D'UN TRAPÈZE

CORRECTION

1. Étudions les variations de f sachant que $x \in]0;1[$:

Ici: • $\mathcal{D}_f =]0;1[$,

• $\mathcal{D}_{f'} =]0;1[$,

• pour tout $x \in]0;1[$: $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 4x + 1}{2\sqrt{1 - x^2}}$.

Notons que pour tout $x \in]0;1[$: $2\sqrt{1 - x^2} > 0$.

Donc le signe de f' dépend du signe de " $-2x^2 - 4x + 1$ ".

Nous savons que les racines de f' sont: $-1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $-1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Or: • $x_1 = -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} \in]0;1[$

• $x_2 = -1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2} \notin]0;1[$.

Distinguons 2 cas:

• $f'(x) \leq 0$ ssi $-2x^2 - 4x + 1 \leq 0$ cad ssi $x \in]-\infty; x_2] \cup [x_1; +\infty[$

• $f'(x) \geqslant 0$ ssi $-2x^2 - 4x + 1 \geqslant 0$ cad ssi $x \in [\, x_2 \,;\, x_1 \,]$.

Or: $x \in]\,0\,;\,1\,[$ et $x_2 \notin]\,0\,;\,1\,[$.

D'où: • $f'(x) \leqslant 0$ ssi $x \in [\, x_1 \,;\, 1\,[$

• $f'(x) \geqslant 0$ ssi $x \in]\,0\,;\, x_1\,]$.

Nous pouvons ainsi dresser le tableau de variations de f:

x	0		$x_1 = -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$		1
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	‖	↗	a	↘	‖

, avec: • $a = f(x_1)$.

Ainsi: • f est croissante sur $]\,0\,;\, x_1\,]$

• f est décroissante sur $[\, x_1 \,;\, 1\,]$.

2. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ?

Ici, nous obtenons un seul extremum au point A d'abscisse $x = -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Comme f est croissante sur $]\,0\,;\, -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}\,[$ et décroissante sur $[\, -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} \,;\, 1\,[$,

l'extremum au point A d'abscisse $x = -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ est: un maximum.

Donc l'aire du trapèze est maximale quand: $x = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.

3. Déterminons alors cette aire:

L'aire maximale du trapèze est égale à: $a = f\left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.