1^{re} Technologique Mathématiques

Études de Fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

CORRECTION

1. Justifions que 1 est racine de l'équation $f(x) = 0$:

Pour tout $x \in [-2 ; 2]$: $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Dans ces conditions: $f(1) = (1)^3 - 3 \times (1) + 2$

$= 0$.

Ainsi 1 est bien racine de l'équation $f(x) = 0$.

2. Calculons $f'(x)$ sur $[-2 ; 2]$:

La fonction f est dérivable sur $[-2 ; 2]$.

D'où, nous pouvons calculer f' sur $[-2 ; 2]$:

$f'(x) = 3x^2 - 3$, pour tout $x \in [-2 ; 2]$.

La dérivée de la fonction f, pour tout $x \in [-2 ; 2]$, est donc:

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

3. Étudions le signe de f' sur $[-2 ; 2]$:

Pour tout $x \in [-2 ; 2]$: $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$.

Dans ces conditions, f' admet 2 racines : $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$.

D'où le tableau de signe de f' sur $[-2 ; 2]$ est :

x	-2		-1		1		2
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, le signe de f' sur $[-2 ; 2]$ est :

- strictement positif sur $[-2 ; -1[\cup]1 ; 2]$
- nul si $x = -1$ ou $x = 1$
- strictement négatif sur $]-1 ; 1[$.

4. **Déduisons-en le tableau de variations de f sur $[-2 ; 2]$:**

Le tableau de variations de f sur $[-2 ; 2]$ est le suivant :

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	↗	b	↘	c	↗	d

, avec:

- $a = 0$
- $b = 4$
- $c = 0$
- $d = 4$.

Ainsi:
- f est croissante sur $[-2 ; -1]$
- f est décroissante sur $[-1 ; 1]$
- f est croissante sur $[1 ; 2]$.

5. Donnons les coordonnées du point d'intersection entre $\mathcal{C}$ et D:

Soit M $(x ; y)$ le point d'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et D sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.

Les coordonnées du point M doivent vérifier le système:

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x + 2 \\ y = -3x + 4 \end{cases} \quad (I).$$

$(I) \iff x^3 - 3x + 2 = -3x + 4 \iff x^3 = 2$ cad $x = 2^{1/3}$.

Et donc: $f(2^{1/3}) = (2^{1/3})^3 - 3 \times (2^{1/3}) + 2$

$= 2 - 3 \times 2^{1/3} + 2$

$= 4 - 3 \times 2^{1/3}$.

En conclusion les coordonnées du point M, intersection entre $\mathcal{C}$ et D sont:

$$M\,(2^{1/3} ; 4 - 3 \times 2^{1/3}).$$