Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT S

ARITHMÉTIQUE ET MATRICES, BAC S

- Arithmétique
- PGCD
- Congruence
- Théorème de Gauss
- Théorème de Bézout
- Nombres premiers
- Matrice inversible
- Matrice identité I_2
- Matrice diagonale D
- Matrice inverse P^{-1}
- $M = PDP^{-1}$

EXERCICE 4

[Polynésie 2019]

Partie A:

1. Conjecturons les valeurs possibles du chiffre des unités des termes de la suite (V_n):

Les valeurs possibles du chiffre des unités semblent être:

0 1 4 5 6 9 puis 0 1 4 5 6 9 puis 0 1 4 5 6 9.

2. a. Justifions que pour tout entier naturel n, $\begin{cases} U_{n+3} = 26\,U_n + 45\,V_n \\ V_{n+3} = 15\,U_n + 26\,V_n \end{cases}$:

D'après l'énoncé, pour tout entier naturel n: $\begin{pmatrix} U_{n+3} \\ V_{n+3} \end{pmatrix} = M^3 \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$.

Or: • $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$,

• $M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions: $\begin{pmatrix} U_{n+3} \\ V_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$

cad: $\begin{cases} U_{n+3} = 26\,U_n + 45\,V_n \\ V_{n+3} = 15\,U_n + 26\,V_n \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Au total, pour tout entier naturel n, nous avons bien: $\begin{cases} U_{n+3} = 26\,U_n + 45\,V_n \\ V_{n+3} = 15\,U_n + 26\,V_n \end{cases}$.

2. b. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $V_{n+3} \equiv V_n\,[\,5\,]$:

Nous savons que pour tout entier naturel n: $V_{n+3} = 15\,U_n + 26\,V_n$.

Or: • $15\,U_n \equiv 0\,[\,5\,]$,

• $26\,V_n \equiv 1 \times V_n\,[\,5\,]$ (car: $26 = 5 \times 5 + 1$).

Ainsi, pour tout entier naturel n: $V_{n+3} \equiv V_n\,[\,5\,]$.

3. Démontrons que pour tout entier naturel q, $V_{3q+r} \equiv V_r\,[\,5\,]$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel q: $V_{3q+r} \equiv V_r\,[\,5\,]$ ".

Initialisation: • En prenant $q = 0$, nous avons:

$V_{3q+r} = V_{3\times0+r} = V_r$ et $V_r \equiv V_r\,[\,5\,]$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• En prenant $q = 1$, nous avons:

$V_{3q+r} = V_{3\times1+r} = V_{3+r} = V_{r+3} \equiv V_r\,[\,5\,]$.

(d'après la question précédente)

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $q \in \mathbb{N}$, supposons $V_{3q+r} \equiv V_r\ [5]$
et montrons qu'alors $V_{3(q+1)+r} \equiv V_r\ [5]$.

Supposons: $V_{3q+r} \equiv V_r\ [5]$, pour un entier naturel q fixé.
(1)

(1) $\Rightarrow V_{3(q+1)+r} = V_{3q+3+r}$

$\Rightarrow V_{3(q+1)+r} = V_{(3q+r)+3}$

$\Rightarrow V_{3(q+1)+r} = V_{n+3}$, **avec**: $n = 3q + r$

$\Rightarrow V_{3(q+1)+r} \equiv V_n\ [5]$, **car**: $V_{n+3} \equiv V_n\ [5]$ d'après 2. b.

$\Rightarrow V_{3(q+1)+r} \equiv V_{3q+r}\ [5]$

$\Rightarrow V_{3(q+1)+r} \equiv V_r\ [5]$, **par hypothèse**.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons $V_{3q+r} \equiv V_r\ [5]$.

4. Déduisons-en que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, V_n est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5:

Donc pour tout entier naturel q: $V_{3q+r} \equiv V_r\ [5]$.

- pour $r = 0$: $V_{3q+0} \equiv V_0\ [5]$ **cad**: $V_{3q} \equiv 0^*\ [5]$,
- pour $r = 1$: $V_{3q+1} \equiv V_1\ [5]$ **cad**: $V_{3q+1} \equiv 1^*\ [5]$,
- pour $r = 2$: $V_{3q+2} \equiv V_2\ [5]$ **cad**: $V_{3q+2} \equiv 4^*\ [5]$.

*: **d'après le tabeau de l'énoncé**.

Au total: $\forall\ n \in \mathbb{N}$, V_n est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5.

5. Concluons:

Nous venons de montrer que: $\forall\ n \in \mathbb{N}$, V_n est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire pour tout entier naturel k:

$$\begin{cases} \bullet\ V_n = 0 + 5k \\ \bullet\ V_n = 1 + 5k \\ \bullet\ V_n = 4 + 5k \end{cases} \quad (I).$$

Distinguons 2 cas:

1er **cas**: Si k est pair, avec $k = 2q$, $q \in \mathbb{N}$.

Dans ces conditions:

$$(I) \iff \begin{cases} V_n = 0 + 10q \\ V_n = 1 + 10q \\ V_n = 4 + 10q \end{cases}.$$

Dans ce cas: $\{0, 1, 4\}$ est l'ensemble des valeurs prises par le chiffre des unités.

2e **cas**: Si k est impair, avec $k = 2q + 1$, $q \in \mathbb{N}$.

Dans ces conditions:

$$(I) \iff \begin{cases} V_n = 0 + 5(2q + 1) = 5 + 10q \\ V_n = 1 + 5(2q + 1) = 6 + 10q \\ V_n = 4 + 5(2q + 1) = 9 + 10q \end{cases}.$$

Dans ce cas: $\{5, 6, 9\}$ est l'ensemble des valeurs prises par le chiffre des unités.

Partie B:

1. Montrons que $q < p < 2q$:

D'après l'énoncé: $\frac{p}{q} = \sqrt{3}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Or: $1 < \sqrt{3} < 2$.

D'où: $1 < \frac{p}{q} < 2$ **cad**: $q < p < 2q$.

Au total, nous avons bien: $q < p < 2q$.

2. Donnons M^{-1}:

Nous savons que: $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Posons: $M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

D'après le cours: $M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I_2$, avec $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions: $M \times M^{-1} = I_2 \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} 2a + 3c = 1 \\ 2b + 3d = 0 \\ a + 2c = 0 \\ b + 2d = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -1 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Ainsi: $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. a. Vérifions que $p' = 2p - 3q$ et que $q' = -p + 2q$:

D'après l'énoncé: $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Ainsi: $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2p - 3q \\ -p + 2q \end{pmatrix}.$$

D'où nous avons bien: $\begin{cases} p' = 2p - 3q \\ q' = -p + 2q \end{cases}.$

3. b. Justifions que $(p' ; q')$ est un couple d'entiers relatifs:

p et q sont des entiers non nuls.

Par conséquent: $2p - 3q$ et $-p + 2q$ sont bien des entiers relatifs.

Ainsi: $(p' ; q') = (2p - 3q ; -p + 2q)$ est bien un couple d'entiers relatifs.

3. c. Montrons que $p' = q'\sqrt{3}$:

Nous savons que: • $p' = 2p - 3q$

• $q' = -p + 2q$.

• $p = q\sqrt{3}$

Etape 1: Calcul de $q' \times \sqrt{3}$.

$q' \times \sqrt{3} = (-p + 2q) \times \sqrt{3}$

$= (-q\sqrt{3} + 2q) \times \sqrt{3}$

$= q \times (2\sqrt{3} - 3)$.

Etape 2: Calcul de p'.

$p' = 2p - 3q$

$= 2q\sqrt{3} - 3q$

$= q \times (2\sqrt{3} - 3)$.

Au total, nous avons bien: $p' = q' \times \sqrt{3}$.

3. d. Montrons que $0 < q' < q$:

Nous avons montré que pour tous entiers naturels p et q non nuls: $q < p < 2q$.

Nous pouvons donc écrire:

$q < p < 2q \iff -2q < -p < -q$

$\iff -2q + 2q < -p + 2q < -q + 2q$

$\iff 0 < q' < q$.

Au total, nous avons bien: $0 < q' < q$.

3. e. Déduisons-en que $\sqrt{3}$ n'est pas un rationnel:

Nous savons que:
- p et q sont des entiers naturels non nuls.
- q est le plus petit entier naturel possible.
- $\frac{p}{q} = \sqrt{3}$
- $\frac{p'}{q'} = \sqrt{3}$.

Or: $0 < q' < q$, d'après la question précédente.

Donc q n'est pas le plus petit entier naturel possible.

Du fait de cette contradiction: $\sqrt{3}$ n'est pas un rationnel.