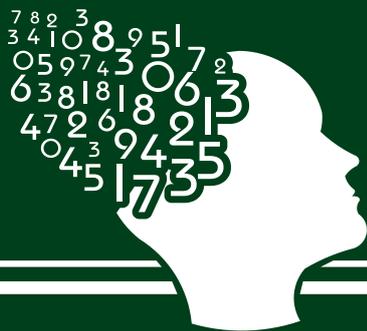


# Corrigé

## Exercice 3



---

---

freemaths.fr

---

---

# LES MATHÉMATIQUES

## AU BACCALAURÉAT S

### SUITES NUMÉRIQUES, BAC S

- Suite arithmétique
- Suite géométrique
- Calcul de  $U_0$ ,  $U_1$  et  $U_2$
- Raison et premier terme d'une suite
- Suite croissante, décroissante
- Majorant, minorant
- Démonstration par Récurrence
- Expression de  $U_n$  en fonction de  $n$
- Suite convergente
- Théorème des gendarmes
- Limites
- Algorithmes

## EXERCICE 3

[ Polynésie 2019 ]

1. Montrons que  $I_0 = \ln(2)$ :

D'après l'énoncé, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ : •  $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$ ,

•  $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx$ .

Soit  $h$ , la fonction définie sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  par:  $h(x) = \frac{1}{1-x}$ .

La fonction  $h$  est continue sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  (avec  $1-x \neq 0$ ), elle admet donc des

primitives sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  et par conséquent:  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx$  existe.

D'où:  $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx$

$$= - \left[ \ln(1-x) \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= - \left( \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(1) \right)$$

$$= - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ cad: } I_0 = \ln(2).$$

Donc nous avons bien:  $I_0 = \ln(2)$ .

## 2. a. Calculons $I_0 - I_1$ :

$$\begin{aligned} I_0 - I_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot dx \\ &= \left[ x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Au total:  $I_0 - I_1 = \frac{1}{2}$ .

## 2. b. Déduisons-en $I_1$ :

Nous savons que:  $\bullet I_0 = \ln(2)$

$\bullet I_0 - I_1 = \frac{1}{2}$

D'où:  $I_1 = I_0 - \frac{1}{2}$  cad:  $I_1 = -\frac{1}{2} + \ln(2)$ .

Ainsi:  $I_1 = -\frac{1}{2} + \ln(2)$ .

## 3. a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}: I_n - I_{n+1} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{1-x} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x^n - x^{n+1}}{1-x} \right) dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n \times (1-x)}{(1-x)} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx$$

$$= \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} \text{ cad: } I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}.$$

Au total, nous avons bien: pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$ .

### 3. b. Proposons l'algorithme demandée:

L'algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel  $n$  donné, la valeur de  $I_n$  est le suivant:

$I \leftarrow \ln(2)$

$k \leftarrow 0$

Tant que  $k < n$  faire

$k \leftarrow k + 1$
$I \leftarrow I - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k}$

Fin Tant que

Afficher  $I$

4. a. Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$ :

Pour tout  $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons:

$$\bullet g_1(x) = 0,$$

$$\bullet f(x) = \frac{x^n}{1-x},$$

$$\bullet g_2(x) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Notons que:

- les fonctions  $g_1, f$  et  $g_2$  sont continues sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ ;

- elles admettent donc des primitives sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ ,  
et par conséquent:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g_1(x) dx, \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \text{ et } \int_0^{\frac{1}{2}} g_2(x) dx \text{ existent;}$$

- de plus, les fonctions  $g_1, f$  et  $g_2$  sont positives sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ ;

- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} g_1(x) dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} g_2(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n}{1-x}\right) dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n}{1-x}\right) dx \leq \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Au total, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ :  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$ . (a)

4. b. Déduisons-en la limite de la suite  $(I_n)$  en  $+\infty$ :

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ : •  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$  (terme de gauche de (a))

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$  (terme de droite de (a)).

D'où d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Au total:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

5. a. Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = I_0 - I_n$ :

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, nous avons:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

$$= [I_0 - I_1] + [I_1 - I_2] + [I_2 - I_3] + \dots + [I_{n-1} - I_n]$$

$$\left( \text{car: } I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} \right)$$

cad:  $S_n = I_0 - I_n$ , après simplification !

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous avons bien:  $S_n = I_0 - I_n$ .

5. b. Calculons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_0 - I_n$$

$$= \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} I_0 \right) - \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \right)$$

$$= \ln(2) - 0$$

$$= \ln(2).$$

Au total:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$ .