Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT S

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE, BAC S

- Droites et Plans
- Triangle rectangle, Théorème de Pythagore
- Triangle isocèle
- Tétraèdre
- Distance entre deux points
- Vecteurs colinéaires ou coplanaires
- Droites sécantes
- Produit scalaire et Norme d'un vecteur
- Vecteurs orthogonaux
- Représentation paramétrique d'une droite
- Equation cartésienne d'un plan
- Théorème du Toit

EXERCICE 4

[Polynésie 2019]

1. Montrons que le plan (EBD) a pour équation cartésienne $3x + 2y + 6z - 36 = 0$:

D'après l'énoncé: **l'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine A dans lequel nous avons B (12; 0; 0), D (0; 18; 0) et E (0; 0; 6).**

Notons que: • les trois points B, D et E appartiennent aux trois axes de coordonnées;

• les trois points B, D et E sont bien distincts et différents de A.

Dans ces conditions, le plan (EBD) existe et son équation est de la forme:

$ax + by + cz = d$ (1), a, b, c et d étant des réels.

Déterminons les réels a, b, c et d:

• B ∈ (EBD), d'où: (1) <=> $12a + 0.b + 0.c = d$ **cad:** $a = \frac{d}{12}$;

• D ∈ (EBD), d'où: (1) <=> $0.a + 18b + 0.c = d$ **cad:** $b = \frac{d}{18}$;

• **E ∈ (EBD), d'où: (1) <=> $0.a + 0.b + 6c = d$ cad:** $c = \frac{d}{6}$.

Dans ces conditions, nous avons:

(1) <=> $\frac{d}{12}x + \frac{d}{18}y + \frac{d}{6}z = d$

<=> $\frac{1}{12}x + \frac{1}{18}y + \frac{1}{6}z = 1$

$\Longleftrightarrow$ $3x + 2y + 6z = 36$. (en multipliant par " 36 ")

Au total, le plan (EBD) a bien comme équation cartésienne: $3x + 2y + 6z = 36$.

2. a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (AG):

D'après le cours, nous savons que:

- Soit A $(x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace.

- Soit $\vec{u}$ $(a ; b ; c)$ un vecteur non nul de l'espace.

- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot a \\ y = y_A + t \cdot b \\ z = z_A + t \cdot c \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite (AG) passe par le point A (0 ; 0 ; 0),

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (AG) est: $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 12 - 0 \\ 18 - 0 \\ 6 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(en effet: G (12 ; 18 ; 6))

D'où une représentation paramétrique de la droite (AG) passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AG}$ (12 ; 18 ; 6) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 0 + 12t \\ y = 0 + 18t \\ z = 0 + 6t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Au total, une représentation paramétrique de la droite (AG) est:

$$\begin{cases} x = 12t \\ y = 18t \\ z = 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. b. Déterminons les coordonnées du point d'intersection K:

D'après l'énoncé: " **K est le point d'intersection du plan (EBD) et de la droite (AG)** ".

Une représentation paramétrique de la droite (AG) est:

$$\begin{cases} x = 12t \\ y = 18t \\ z = 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Soit **K** $(x_K ; y_K ; z_K)$, un point appartenant à la droite (AG).

K appartient aussi au plan (EBD) ssi ses coordonnées vérifient:

$$3x + 2y + 6z = 36.$$

D'où: $3x_K + 2y_K + 6z_K = 36 \iff 3(12t) + 2(18t) + 6(6t) = 36$ **cad**: $t = \frac{1}{3}$.

Dans ces conditions, les coordonnées du point K sont:

$$\begin{cases} x_K = 12 \times \frac{1}{3} = 4 \\ y_K = 18 \times \frac{1}{3} = 6 \\ z_K = 6 \times \frac{1}{3} = 2 \end{cases}.$$

Au total, les coordonnées du point K sont: $(4 ; 6 ; 2)$.

3. **La droite (AG) est-elle orthogonale au plan (EBD) ?**

Nous savons qu'un vecteur directeur de la droite (AG) est: $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}12\\18\\6\end{pmatrix}$.

De plus, un vecteur normal au plan (EBD) est: $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$.

(car: $3x + 2y + 6z = 36$)

Dans ces conditions: $(12 \times 3) + (18 \times 2) + (6 \times 6) = 108 \neq 0$.

Donc: la droite (AG) n'est pas orthogonale au plan (EBD).

4. a. **Montrons que les points B, K et M sont alignés:**

Nous savons que: B (12 ; 0 ; 0) et K (4 ; 6 ; 2).

De plus M est le milieu du segment [ED].

D'où: $x_M = \dfrac{0+0}{2} = 0$

$y_M = \dfrac{0+18}{2} = 9$.

$z_M = \dfrac{6+0}{2} = 3$

Dans ces conditions: $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-8\\6\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-12\\9\\3\end{pmatrix}$.

Et, nous remarquons que: $\overrightarrow{BM} = \dfrac{3}{2} \times \overrightarrow{BK}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont donc colinéaires et **les points B, K, M sont donc alignés**.

Au total: les points B, K et M sont bien alignés.

4. b. Construisons le point K sur le graphique:

Notons que: **K (4 ; 6 ; 2)**.

Graphique à la fin du corrigé !

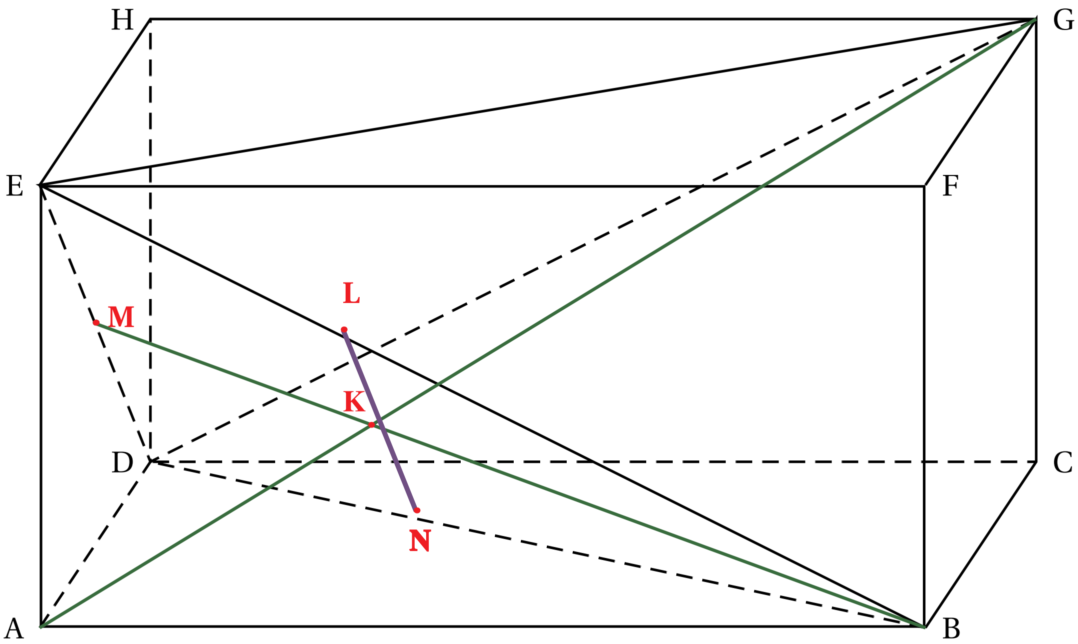
5. a. Démontrons que le plan P coupe le plan (EBD) selon une parallèle à la droite (ED):

Nous avons:
- les plans (AED) et (EBD) se coupent selon la droite (ED),
- le plan P est parallèle au plan (AED) et passe par le point K,
- le point K appartient donc aux deux plans: (EBD) et P.

Ainsi, nous pouvons affirmer que: le plan P coupe bien le plan (EBD) selon une parallèle à la droite (ED), passant par le point K.

5. b. Construisons l'intersection du plan P et de la face EBD du tétraèdre EBDG:

Nous avons le graphique suivant:


H
G
E
F
L
M
K
D
C
N
A
B