Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MERCREDI 20 JUIN 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Spécialité Coefficient : 9

SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Rappel de connaissances :
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est donné par la formule

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

où n désigne la taille de l'échantillon et p la proportion des individus possédant le caractère étudié dans cette population. Les conditions de validité de cet intervalle sont les suivantes :

$$n \geq 30\ ,\ np \geq 5\ ,\ n(1-p) \geq 5.$$

La municipalité d'une grande ville dispose d'un stock de DVD qu'elle propose en location aux usagers des différentes médiathèques de cette ville.
Afin de renouveler son offre de location, la municipalité décide de retirer des DVD de son stock.
Parmi les DVD retirés, certains sont défectueux, d'autres non.
Parmi les 6 % de DVD défectueux sur l'ensemble du stock, 98 % sont retirés.
On admet par ailleurs que parmi les DVD non défectueux, 92 % sont maintenus dans le stock ; les autres sont retirés.

Les trois parties sont indépendantes.

Partie A

On choisit un DVD au hasard dans le stock de la municipalité.
On considère les événements suivants :

- D : « le DVD est défectueux » ;
- R : « le DVD est retiré du stock ».

On note $\overline{D}$ et $\overline{R}$ les événements contraires respectifs des événements D et R.

1. Démontrer que la probabilité de l'événement R est 0,134.
2. Une association caritative contacte la municipalité dans l'objectif de récupérer l'ensemble des DVD qui sont retirés du stock. Un responsable de la ville affirme alors que parmi ces DVD retirés, plus de la moitié est composée de DVD défectueux.
Cette affirmation est-elle vraie ?

Partie B

Une des médiathèques de la ville se demande si le nombre de DVD défectueux qu'elle possède n'est pas anormalement élevé. Pour cela, elle effectue des tests sur un échantillon de 150 DVD de son propre stock qui est suffisamment important pour que cet échantillon soit assimilé à un tirage successif avec remise. Sur cet échantillon, on détecte 14 DVD défectueux.
Peut-on rejeter l'hypothèse selon laquelle, dans cette médiathèque, 6 % des DVD sont défectueux ?

Partie C

Une partie du stock de DVD de la ville est constituée de DVD de films d'animation destinés au jeune public. On choisit un film d'animation au hasard et on note X la variable aléatoire qui donne la durée, en minutes, de ce film. X suit une loi normale d'espérance $\mu = 80$ min et d'écart-type σ.
De plus, on estime que $\text{P}(X \geqslant 92) = 0,10$.

1. Déterminer le réel σ et en donner une valeur approchée à 0,01.
2. Un enfant regarde un film d'animation dont il ne connaît pas la durée. Sachant qu'il en a déjà vu une heure et demie, quelle est la probabilité que le film se termine dans les cinq minutes qui suivent ?

EXERCICE 1

[Polynésie 2018]

Partie A:

1. Démontrons que la probabilité de l'événement R est 0, 134:

D'après l'énoncé, nous avons:

- D = " le DVD est défectueux ".
- $\overline{D}$ = " le DVD est non défectueux ".

- R = " le DVD est retiré du stock ".
- $\overline{R}$ = " le DVD n'est pas retiré du stock ".

- $P(D) = 6\%$
- $P(\overline{D}) = 1 - 6\% = 94\%$.

- $P_D(R) = 98\%$
- $P_D(\overline{R}) = 2\%$.

- $P_{\overline{D}}(R) = 1 - 92\% = 8\%$
- $P_{\overline{D}}(\overline{R}) = 92\%$.

Nous devons calculer: $P(R)$.

Or, l'événement $R = (R \cap D) \cup (R \cap \overline{D})$.

D'où: $P(R) = P(R \cap D) + P(R \cap \overline{D})$

$$= P_D(R) \times P(D) + P_{\overline{D}}(R) \times P(\overline{D}).$$

Ainsi: $P(R) = 98\% \times 6\% + 8\% \times 94\%$ cad: $P(R) = 13,4\%$.

Au total, nous avons bien: $P(R) = 13,4\%$.

2. Le responsable a-t-il raison ?

Pour répondre à cette question, nous devons calculer: $P_R(\overline{D})$.

$$P_R(\overline{D}) = \frac{P(R \cap \overline{D})}{P(R)}$$

$$= \frac{P_{\overline{D}}(R) \times P(\overline{D})}{P(R)}.$$

Ainsi: $P_R(\overline{D}) = \dfrac{8\% \times 94\%}{13,4\%}$ cad: $P_R(\overline{D}) \approx 56,12\%$.

Comme **56, 12% > 50%**: le responsable a **raison**.

Partie B:

Peut-on rejeter l'hypothèse selon laquelle, 6% des DVD sont défectueux ?

Pour répondre à cette question, nous allons construire un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

Ici, nous avons:
- $n = 150$
- $p = 6\%$
- $f = \dfrac{14}{150} \Rightarrow f \approx 9,33\%$.

Dans ces conditions:

$n = 150 \geq 30$, $n \cdot p = 9 \geq 5$ et $n \cdot (1 - p) = 141 \geq 5$.

Les conditions sont donc réunies.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right],$$

cad: $I = \left[6\% - 1,96 \times \sqrt{\frac{6\% \times 94\%}{150}} ; 6\% + 1,96 \times \sqrt{\frac{6\% \times 94\%}{150}} \right].$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I = [\, 2,2\% ; 9,8\% \,]$.

Or la fréquence " f ", sur l'échantillon, est telle que: $f = 9,33\% \in I$.

Ainsi, **non** on ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle, 6% des DVD sont défectueux.

Partie C:

1. Déterminons le réel σ :

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 80$ min et d'écart type $\sigma = ?$
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de déterminer σ sachant que: $P(X \geq 92) = 0,10$.

$P(X \geq 92) = 0,10 \iff P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{92 - 80}{\sigma} \right) = 0,10$

$$\Longleftrightarrow \; P\left(T \geqslant \frac{12}{\sigma}\right) = 0,10$$

$$\Longleftrightarrow \; P\left(T \leqslant \frac{12}{\sigma}\right) = 0,90.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{12}{\sigma} \approx 1,2816 \Rightarrow \sigma \approx 9,36 \text{ min, à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Au total, une valeur approchée à 0,01 près de σ est: $\sigma \approx 9,36$ min.

2. Déterminons la probabilité que le film se termine dans les cinq minutes qui suivent:

Cela revient à calculer: $P_{(X \geqslant 90)}(X \leqslant 95)$, car: 90 min = 1 heure et demie.

Or: $$P_{(X \geqslant 90)}(X \leqslant 95) = \frac{P[(X \geqslant 90) \cap (X \leqslant 95)]}{P(X \geqslant 90)}$$

$$= \frac{P(90 \leqslant X \leqslant 95)}{P(X \geqslant 90)}.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P_{(X \geqslant 90)}(X \leqslant 95) = \frac{0,08816}{0,14268} \Rightarrow P_{(X \geqslant 90)}(X \leqslant 95) \approx 0,618, \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Au total, la probabilité que le film se termine dans les cinq minutes qui suivent est d'environ: 61,8%.