Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MERCREDI 20 JUIN 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

OBLIGATOIRE

Enseignement Obligatoire Coefficient : 7

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

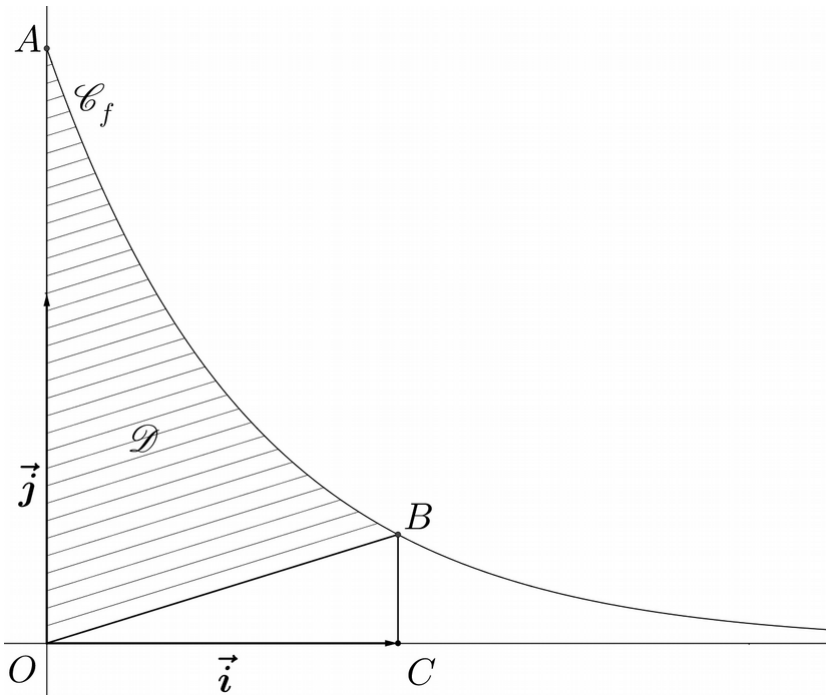
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-kx}$ où k est un nombre réel strictement positif.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\right)$.
On considère le point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 et le point B de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1.
Le point C a pour coordonnées $(1\ ;\ 0)$.



1. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Exprimer, en fonction de k, l'aire du triangle OCB et celle du domaine $\mathscr{D}$ délimité par l'axe des ordonnées, la courbe $\mathscr{C}_f$ et le segment $[OB]$.
3. Montrer qu'il existe une unique valeur du réel k strictement positive telle que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ vaut le double de celle du triangle OCB.

EXERCICE 3

[Polynésie 2018]

1. Déterminons une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$:

Ici: • $f(x) = ke^{-kx}$

• $Df = [0;+\infty[$.

Sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction F est une primitive de la fonction f ssi:

$$\mathbf{F'(x) = f(x)}.$$

Pour $x \in [0;+\infty[$, prenons: $F(x) = -e^{-kx}$.

F est bien une primitive de f sur $[0;+\infty[$ car:

$F'(x) = -(-k)e^{-kx} \iff F'(x) = ke^{-kx}$ cad: $\mathbf{F'(x) = f(x)}$.

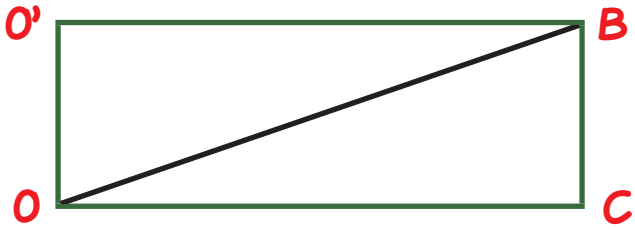
Ainsi, une primitive de la fonction f sur $[0;+\infty[$ est: $F(x) = -e^{-kx}$.

2. a. Exprimons l'aire du triangle OCB en fonction de k:

Le triangle OCB est rectangle en C.

L'aire du triangle OCB est égale à la moitié de l'aire du rectangle OO'BC,

O' étant le point de coordonnées: $x_{O'} = 0$ et $y_{O'} = ke^{-0\times k} = k$.



, avec:

• O (0; 0)

• O' (0; k)

• B (1; ke^{-k})

• C (1; 0)

Or, l'aire du rectangle OO'BC est: $\mathcal{A}_R = OC \times BC$

$= 1 \times ke^{-k}$.

Dans ces conditions, l'aire du triangle OCB est: $\mathcal{A}_T = \frac{ke^{-k}}{2}$.

Au total, en fonction de k, l'aire du triangle OCB est: $\mathcal{A}_T = \frac{ke^{-k}}{2}$.

2. b. Exprimons, en fonction de k, l'aire du domaine $\mathcal{D}$:

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par l'axe des ordonnées, la courbe $\mathcal{C}_f$ et le segment [OB] est égale à:

$$\mathcal{A}_D = \left(\int_0^1 f(x)\,dx \right) - \mathcal{A}_T.$$

La fonction f est continue sur [0 ; 1], elle admet donc des primitives sur [0 ; 1]

et par conséquent: $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe.

Ici: $\int_0^1 f(x)\,dx = [\,F(x)\,]_0^1$

$= [\,-e^{-kx}\,]_0^1$

$= (-e^{-k}) - (-e^0)$

$= 1 - e^{-k}$.

Ainsi, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est: $\mathcal{A}_D = (1 - e^{-k}) - \left(\frac{ke^{-k}}{2}\right)$

$= \frac{2 - 2e^{-k} - ke^{-k}}{2}$.

Au total, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est: $\mathcal{A}_D = \frac{2 - 2e^{-k} - ke^{-k}}{2}$ u.a

3. Montrons qu'il existe une unique valeur du réel k > 0 telle que l'aire du domaine $\mathcal{D}$ vaut le double de celle du triangle OCB:

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est égale au double de celle du triangle OCB quand:

$$\mathcal{A}_D = 2 \times \mathcal{A}_T.$$

$$\mathcal{A}_D = 2 \times \mathcal{A}_T \iff \frac{2 - 2e^{-k} - ke^{-k}}{2} = 2 \times \left(\frac{ke^{-k}}{2}\right)$$

$$\iff 2 - 2e^{-k} - ke^{-k} = 2ke^{-k}$$

$$\iff -3ke^{-k} - 2e^{-k} + 2 = 0.$$

Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par: $g(k) = -3ke^{-k} - 2e^{-k} + 2$.

Il s'agit de montrer que l'équation $g(k) = 0$ admet une unique solution strictement positive que nous noterons: θ.

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " w " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = w$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = w$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = w$ admet une unique solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • g est continue sur $[0; +\infty[$, donc sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$.

• " $w = 0$ " est compris entre: $g\left(\frac{1}{3}\right) \approx -0,15$

et: $\lim\limits_{k \to +\infty} g(k) = 2$, car: $\lim\limits_{k \to +\infty} e^{-k} = 0$.

- g est strictement croissante sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$ car pour tout $k \in]\frac{1}{3}; +\infty[$:

$$g'(k) = -e^{-k} + 3ke^{-k} > 0.$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $g(k) = 0$ $(w = 0)$ admet une unique solution θ appartenant à $]\frac{1}{3}; +\infty[$. Donc $\theta > 0$.

Au total: $g(k) = 0$ admet une unique solution θ sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$ et elle est donc strictement positive.