Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

Sujets Mathématiques Bac 2017
freemaths.fr
Polynésie

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6 dont une annexe en page 6/6 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

freemaths.fr freemaths.fr

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en m.s^{-1}, de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi : pour tout réel positif ou nul t, $v(t) = 9,81\,\dfrac{m}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$; la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.
*Les parties **A** et **B** sont indépendantes.*

Partie A - Cas général

1. Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.
2. La goutte ralentit-elle au cours de sa chute ?
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t) = 9,81\,\frac{m}{k}$. Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.
4. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\dfrac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?

Partie B

Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3,9$.

À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est 15 m.s^{-1}.

1. Depuis combien de temps la goutte s'est-elle détachée de son nuage ? Arrondir la réponse au dixième de seconde.
2. En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse. Arrondir la réponse au dixième de m.s^{-1}.

EXERCICE 4

[Polynésie 2017]

Partie A: Cas général

1. Déterminons les variations de la vitesse de la goutte d'eau:

• Calculons V':

Ici: • $V(t) = 9,81\,\dfrac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

• $D_V = [\,0\,;+\infty\,[$.

V est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer V' pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$: $V'(t) = 9,81\,\dfrac{m}{k}\left(\dfrac{k}{m}\,e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

$\Rightarrow$ $V'(t) = 9,81 \times e^{-\frac{k}{m}t}$.

Au total, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$: $V'(t) = 9,81 \times e^{-\frac{k}{m}t} > 0$.

• Étudions le sens de variation de V sur $[\,0\,;+\infty\,[$:

Nous avons: • V est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

(car sur $[\,0\,;+\infty\,[$, $V'(t) > 0$)

2. La goutte ralentit-elle au cours de sa chute ?

La goutte ne ralentit pas au cours de sa chute car V est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$, ce qui signifie que la vitesse instantanée verticale augmente au cours de la chute de la goutte.

3. Montrons que $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = 9,81\,\dfrac{m}{k}$:

Il s'agit ici de calculer : $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(9,81\,\dfrac{m}{k} - \dfrac{9,81\,m}{e^{\frac{k}{m}t}} \right)$.

Or, d'après le cours : • $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{9,81\,m}{e^{\frac{k}{m}t}} = 0$ (Théorème des croissances comparées).

Ainsi : $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = 9,81\,\dfrac{m}{k}$.

Au total, nous avons bien : $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = 9,81\,\dfrac{m}{k}$.

4. L'affirmation est-elle correcte ?

Soient : • V_{max}, la vitesse limite de la goutte, avec : $V_{max} = 9,81\,\dfrac{m}{k}$,

• V_G, la vitesse de la goutte quand $t = \dfrac{5\,m}{k}$, avec : $V_G = 9,81\,\dfrac{m}{k}\,(1 - e^{-5})$.

Nous avons : $V_G = 9,81\,\dfrac{m}{k} \times (0,9932)$

$= V_{max} \times (0,9932)$

$\Rightarrow V_G = 99,32\,\% \times V_{max} > 99\,\% \times V_{max}$.

Au total : **oui**, la vitesse de la goutte dépasse 99% de sa vitesse limite.

Partie B : Cas particulier

1. Déterminons depuis combien de temps la goutte s'est détachée de son nuage :

Il s'agit ici de résoudre l'équation : $V(t) = 15 \; m.s^{-1}$.

$$V(t) = 15 \iff 9,81 \times \left(\frac{6}{3,9}\right) \times \left(1 - e^{-\left(\frac{3,9}{6}\right) \times t}\right) = 15$$

$$\iff 15,09 \times e^{-0,65 \times t} = 0,09$$

$$\iff -0,65 \times t \approx \ln(0,006)$$

$$\Rightarrow t \approx 7,87 \text{ secondes.}$$

Au total, le temps écoulé depuis que la goutte s'est détachée de son nuage est d'environ : 7, 87 secondes ou 7, 8 secondes (au dixième de seconde).

2. Déduisons-en la vitesse moyenne ce cette goutte :

Soit " m ", la vitesse moyenne de V sur [0 ; **7, 87**].

m est telle que : $m = \dfrac{1}{7,87 - 0} \displaystyle\int_0^{7,87} V(t)\, dt.$

Soit : $I = \displaystyle\int_0^{7,87} V(t)\, dt.$

V est continue sur [0 ; 7, 87], elle admet donc des primitives sur [0 ; 7, 87] et par conséquent : I existe.

$$I = \int_0^{7,87} 15,09\,(1 - e^{-0,65 \times t})\, dt$$

$$= 15,09 \left[t + \frac{1}{0,65}\, e^{-0,65 \times t} \right]_0^{7,87}$$

$$\Rightarrow I \approx 95,227.$$

D'où la vitesse moyenne de V sur [0 ; 7, 87] est:

$$m = \frac{1}{7,87 - 0} \times I \implies m \approx 12,1 \; m.s^{-1}.$$

Au total, la vitesse moyenne de cette goutte est d'environ: $12,1 \; m.s^{-1}$.