Corrigé

Exercice 5

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Obligatoire **Coefficient : 7**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 5 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'événement « la $n^{\text{ième}}$ partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet événement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}\,p_n + \frac{1}{2}$.

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	1	0,4375	0,3906	0,4023	0,3994	0,4001	0,3999

Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c) La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

EXERCICE 5

[Liban 2018]

1. Montrons que $p_2 = \dfrac{7}{16}$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- G_n = " la $n^{ième}$ partie est gagnée ".
- $\overline{G}_n$ = " la $n^{ième}$ partie est perdue ".

- $P_{\overline{G}_{n-1}}(G_n) = 25\%$
- $P_{\overline{G}_{n-1}}(\overline{G}_n) = 1 - 25\% = 75\%$.

- $P_{\overline{G}_{n-1}}(\overline{G}_n) = 50\%$
- $P_{\overline{G}_{n-1}}(G_n) = 1 - 50\% = 50\%$.

- $P(A_1) = p_1 = 25\%$
- $P(G_n) = p_n$
- $P(\overline{G}_n) = 1 - p_n$.

Il s'agit ici de calculer: $P(G_2)$.

L'événement $G_2 = (G_2 \cap G_1) \cup (G_2 \cap \overline{G}_1)$.

D'où: $P(G_2) = P(G_2 \cap G_1) + P(G_2 \cap \overline{G}_1)$

$$= P_{G_1}(G_2) \times P(G_1) + P_{\overline{G}_1}(G_2) \times P(\overline{G}_1).$$

Ainsi: $P(G_2) = 25\% \times 25\% + 50\% \times 75\%$ => $P(G_2) = 43,75\%$.

Au total, nous avons bien: $p_2 = 43,75\%$ ou $p_2 = \frac{7}{16}$.

2. Montrons que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}$:

Nous avons, pour tout entier naturel n non nul: $p_n = P(G_n)$ et $p_{n+1} = P(G_{n+1})$.

L'événement $G_{n+1} = (G_{n+1} \cap G_n) \cup (G_{n+1} \cap \overline{G}_n)$.

D'où: $P(G_{n+1}) = P(G_{n+1} \cap G_n) + P(G_{n+1} \cap \overline{G}_n)$

$$= P_{G_n}(G_{n+1}) \times P(G_n) + P_{\overline{G}_n}(G_{n+1}) \times P(\overline{G}_n).$$

Ainsi: $P(G_{n+1}) = 25\% \times p_n + 50\% \times (1 - p_n)$

=> $p_{n+1} = -25\% \times p_n + 50\%$ ou $p_{n+1} = -\frac{1}{4} \times p_n + \frac{1}{2}$.

Au total, pour tout entier naturel n non nul: $p_{n+1} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}$.

3. Quelle conjecture peut-on émettre ?

La conjecture que nous pouvons émettre sur la convergence de la suite (p_n) est:

" on pourrait, a priori, penser que la suite (p_n) converge vers 0, 4 ".

4. a. Montrons que (U_n) est une suite géométrique dont on donnera U_1 et la raison q:

Pour tout entier naturel n non nul:

$U_n = p_n - \frac{2}{5}$ <=> $U_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5}$

$$\Longleftrightarrow \quad U_{n+1} = \left(-\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{5} \quad (1).$$

Or: $U_1 = p_1 - \frac{2}{5} \Rightarrow U_1 = -\frac{3}{20}$ et $p_n = U_n + \frac{2}{5}$.

Ainsi: $(1) \Longleftrightarrow U_{n+1} = \left(-\frac{1}{4}\left[U_n + \frac{2}{5}\right] + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{5}$

$$\Rightarrow U_{n+1} = -\frac{1}{4}U_n.$$

Par conséquent (U_n) est bien une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$ et de premier terme $U_1 = -\frac{3}{20}$.

4. b. Déduisons-en que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}$:

- Comme $U_{n+1} = -\frac{1}{4}U_n$: $U_n = U_1 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}$, avec: $U_1 = -\frac{3}{20}$.
- Nous savons que: * $U_n = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}$

  * $p_n = U_n + \frac{2}{5}$.

D'où: $p_n = -\frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} + \frac{2}{5}$, pour tout entier naturel n non nul.

4. c. Montrons que la suite (p_n) est convergente et interprétons le résultat:

Pour cela, nous allons calculer: $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} -\frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{2}{5} \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} -\frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = 0, \quad \text{car: } \quad -\frac{1}{4} \in]-1; 0[.$$

Cela signifie que: au bout d'un grand nombre de parties, le joueur a environ $\frac{2}{5} = 40\%$ de chance de gagner une partie.

Et de plus, cela valide la conjecture émise à la question **3**.