Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT S

ARITHMÉTIQUE ET MATRICES, BAC S

- Arithmétique
- PGCD
- Congruence
- Théorème de Gauss
- Théorème de Bézout
- Nombres premiers
- Matrice inversible
- Matrice identité I_2
- Matrice diagonale D
- Matrice inverse P^{-1}
- $M = PDP^{-1}$

EXERCICE 4

[Inde, Pondichéry 2019]

Partie A:

1. Sans justifier, donnons deux nombres premiers x et y tels que $40 = x + y$:

Deux nombres premiers x et y tels que $40 = x + y$ sont, par exemple:

$$x = 3 \text{ et } y = 37.$$

2. Résolvons l'équation $20x + 19y = 40$ (E):

• Soit un couple $(x\,;y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E).

D'où: $20x + 19y = 40$.

Or le couple $(40\,;-40)$ est une solution particulière de l'équation (E) car:

$$20 \times 40 + 19 \times (-40) = 40.$$

D'où: $20 \times 40 + 19 \times (-40) = 40$.

Nous pouvons ainsi écrire: $20 \times x + 19 \times y = 20 \times 40 + 19 \times (-40)$

$$\Longleftrightarrow 20\,(x - 40) = 19\,(-y - 40).$$

→ Comme 20 et 19 sont premiers entre eux, d'après le théorème de **GAUSS**, l'entier 19 divise $x - 40$.

Par conséquent, il existe nécessairement un entier relatif p tel que:

$$x - 40 = 19 \times p \text{ cad: } x = 40 + 19 \times p.$$

→ De même, comme 20 et 19 sont premiers entre eux, d'après le théorème de **GAUSS**, l'entier 20 divise $- y - 40$.

Par conséquent, il existe nécessairement un entier relatif p' tel que:

$$- y - 40 = 20 \times p' \quad \textbf{cad}: \quad \mathbf{y = - 40 - 20 \times p'}.$$

• **Réciproque**:

Soient p et p' deux entiers relatifs et: $x = 40 + 19 \times p$ et $y = - 40 - 20 \times p'$.

Dans ces conditions: $20x + 19y = 40$

$$\Longleftrightarrow \quad 20 (40 + 19 \times p) + 19 \times (- 40 - 20 \times p') = 40$$

$$\Longleftrightarrow \quad 40 + 380 (p - p') = 40$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbf{p = p'}.$$

Au total, les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) sont de la forme: $\mathbf{x = 40 + 19\,p}$ **et** $\mathbf{y = - 40 - 20\,p'}$, **avec** $\mathbf{p = p'}$.

Ils sont donc de la forme: $\mathbf{x = 40 + 19\,p}$ **et** $\mathbf{y = - 40 - 20\,p}$.

3. a. Donnons la décomposition de 40 en produit de facteurs premiers:

En produit de facteurs premiers: $\mathbf{40 = 2^3 \times 6}$.

3. b. Montrons que si x et y désignent des entiers naturels, les nombres $x - y$ et $x + y$ ont la même parité:

Notons que: $\mathbf{x + y = (x - y) + 2y}$, avec $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$.

Or: **2y est toujours pair**.

Donc distinguons 2 cas:

1er cas:

Si " $x - y$ " est pair, " $x + y$ " le sera aussi.

2e cas:

Si " $x - y$ " est impair, " $x + y$ " le sera aussi.

Au total: les nombres " $\boldsymbol{x - y}$ " et " $\boldsymbol{x + y}$ " ont toujours la même parité.

3. c. Déterminons toutes les solutions de l'équation $x^2 - y^2 = 40$:

Soit l'équation (E'): $x^2 - y^2 = 40$, avec $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$.

$x^2 - y^2 = 40 \iff (x - y)(x + y) = 40$.

Or, on désire tous les couples $((x - y) ; (x + y))$ de même parité tels que:

$$(x - y)(x + y) = 40.$$

Notons que: $40 = 1 \times 40 = 2 \times 20 = 4 \times 10 = 5 \times 8$.

Nous retiendrons seulement 2 cas: **2×20 et 4×10**.

(car: 2 et 20 ainsi que 4 et 10 ont la même parité)

D'où 4 cas de figures:

- $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 11 \\ y = 9 \end{cases}$;

- $\begin{cases} x - y = 20 \\ x + y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 11 \\ y = 9 \end{cases}$;

- $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$;

- $\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$.

Au total, toutes les solutions de l'équation (E') sont: les couples $(11, 9)$ et $(7, 3)$.

Partie B: Sommes de cubes

1. a. Donnons une décomposition de 40 en " somme " de 5 cubes:

Une décomposition en " somme " de 5 cubes est: $40 = 1^3 + 3^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$.

1. b. b1. Donnons une décomposition de 48 en " somme " de 4 cubes:

Nous savons que $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $6n = (n+1)^3 + (n-1)^3 - n^3 - n^3$.

Or: $48 = 6 \times 8$.

Donc ici: $n = 8$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire: $48 = (8 + 1)^3 + (8 - 1)^3 - 8^3 - 8^3$

cad: $48 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3$.

Ainsi, en " somme " de 4 cubes: $48 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3$.

1. b. b2. Donnons une décomposition de 40 en " somme " de 5 cubes:

Nous savons que:
- $48 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3$,
- $8 = 2^3$.

D'où: $40 = 48 - 8$

$$= 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3 - 2^3.$$

Ainsi, en " somme " de 5 cubes: $40 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3 - 2^3$.

2. a. Recopions et complétons le tableau:

Nous avons le tableau recopié et complété suivant:

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 par 9	0	1	8	0	1	8	0	1	8

2. b. Prouvons que 40 ne peut être décomposé en " somme " de 3 cubes:

Notons que quand le reste de la division euclidienne de n^3 par 9 est **8**, on dit que: l'entier naturel n^3 est congru modulo 9 à -1.

Supposons que: $40 = a^3 + b^3 + c^3$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$.

Dans ces conditions, on dit que: 40 se décompose en " somme " de 3 cubes.

On sait que chacun de ces 3 cubes est congru modulo 9 à **0** ou **1** ou **-1**.

Alors $(a^3 + b^3 + c^3) \equiv x\ [\,8\,]$, avec: $x \in [\,-3\,; -2\,; -1\,; 0\,; 1\,; 2\,; 3\,]$.

Or: $40 \equiv 4\ [\,9\,]$, car: $40 = 4 \times 9 + 4$.

Comme: $4 \notin [\,-3\,; -2\,; -1\,; 0\,; 1\,; 2\,; 3\,]$, 40 ne peut être décomposé en " somme " de 3 cubes.

Au total: **exact**, impossible de décomposer 40 en " somme " de 3 cubes.