Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU VENDREDI 4 MAI 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Obligatoire **Coefficient : 7**

OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

EXERCICE 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.

On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.

La température du four est exprimée en degré Celsius (°C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70 °C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

Partie A

Pour un nombre entier naturel n, on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1\,000$.

La température T_n est calculée par l'algorithme suivant :

```
T ← 1000
Pour i allant de 1 à n
        T ← 0,82 × T + 3,6
Fin Pour
```

1. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.

2. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$.

3. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

Partie B

Dans cette partie, on note t le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint. La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif, par : $f(t) = a\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + b$, où a et b sont deux nombres réels.

On admet que f vérifie la relation suivante : $f'(t) + \frac{1}{5} f(t) = 4$.

1. Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement, la température du four est de 1 000 °C, c'est-à-dire que $f(0) = 1\,000$.

2. Pour la suite, on admet que, pour tout nombre réel positif t : $f(t) = 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20$.

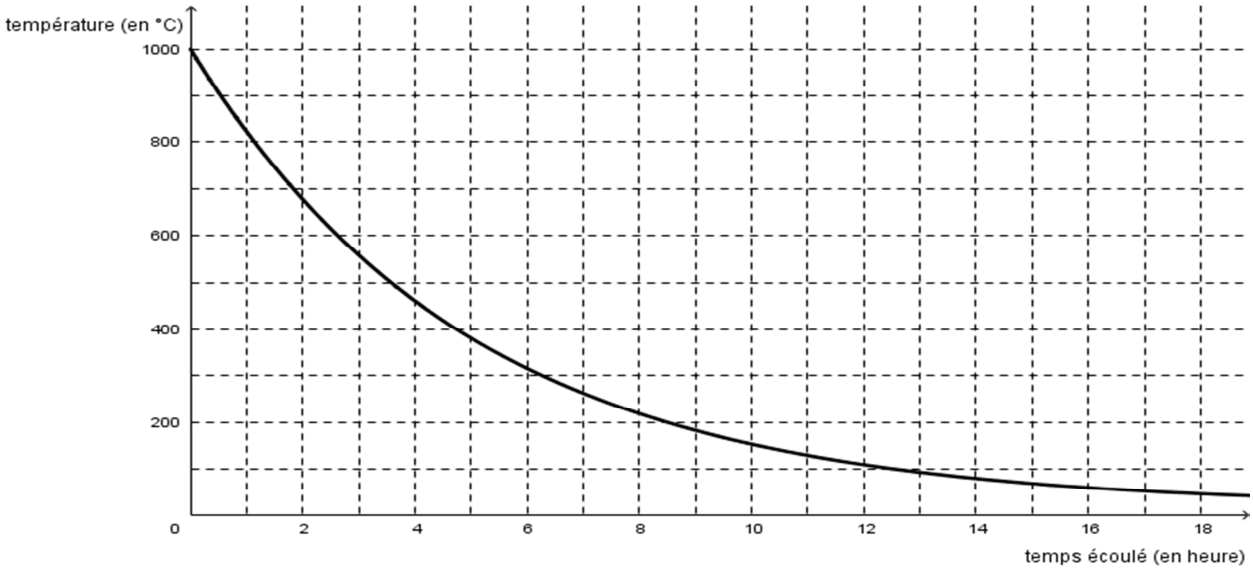
a. Déterminer la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.

b. Étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$. En déduire son tableau de variations complet.

c. Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

3. La température moyenne (en degré Celsius) du four entre deux instants t_1 et t_2 est donnée par : $\dfrac{1}{t_2 - t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{d}t$.

a. À l'aide de la représentation graphique de f ci-dessous, donner une estimation de la température moyenne θ du four sur les 15 premières heures de refroidissement. Expliquer votre démarche.



b. Calculer la valeur exacte de cette température moyenne θ et en donner la valeur arrondie au degré Celsius.

4. Dans cette question, on s'intéresse à l'abaissement de température (en degré Celsius) du four au cours d'une heure, soit entre deux instants t et $(t+1)$. Cet abaissement est donné par la fonction d définie, pour tout nombre réel t positif, par : $d(t) = f(t) - f(t+1)$.

a. Vérifier que, pour tout nombre réel t positif : $d(t) = 980\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$.

b. Déterminer la limite de $d(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
Quelle interprétation peut-on en donner ?

EXERCICE 1

[Inde, Pondichéry 2018]

Partie A: Modélisation discrète

1. Déterminons la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement:

Déterminer la température du four au bout de 4 heures de refroidissement revient à calculer T_4.

Or: • $T_0 = 1000$ degrés,

• $T_1 = 0,82 \times 1000 + 3,6 \iff T_1 = 823,6$ degrés,

• $T_2 = 0,82 \times 823,6 + 3,6 \iff T_2 = 678,952$ degrés,

• $T_3 = 0,82 \times 678,952 + 3,6 \iff T_3 = 560,34064$ degrés,

• $T_4 = 0,82 \times 560,34064 + 3,6 \iff T_4 = 463$ degrés, arrondie à l'unité.

Au total, la température du four au bout de 4 heures de refroidissement est de: 463 degrés Celsius.

2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$ ".

Initialisation: • $T_0 = 980 \times (0,82)^0 + 20$ **cad:** $T_0 = 1000$.

Or, d'après l'énoncé: $T_0 = 1000$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$
et montrons qu'alors $T_{n+1} = 980 \times 0,82^{n+1} + 20$.

Supposons: $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$$(1) \Rightarrow 0,82 \times T_n = 0,82 \times (980 \times 0,82^n + 20)$$

$$\Rightarrow 0,82 \times T_n + 3,6 = 0,82 \times (980 \times 0,82^n + 20) + 3,6$$

$$\Rightarrow T_{n+1} = 980 \times 0,82^{n+1} + (0,82 \times 20 + 3,6)$$

$$\Rightarrow T_{n+1} = 980 \times 0,82^{n+1} + 20.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$T_n = 980 \times 0,82^n + 20.$$

3. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque ?

D'après l'énoncé, la porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70 degrés Celsius.

Dans ces conditions, pour répondre à la question, nous devons résoudre l'inéquation: $T_n \leqslant 70$.

$$T_n \leqslant 70 \iff 980 \times (0,82)^n + 20 \leqslant 70$$

$$\iff (0,82)^n \leqslant \frac{5}{98}$$

$$\iff n \ln(0,82) \leqslant \ln\left(\frac{5}{98}\right)$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{5}{98}\right)}{\ln(0,82)}, \text{ car: } 0,82 \in]0;1[, \text{ et donc: } \ln(0,82) < 0$$

$\Rightarrow$ $n \geqslant 15$ heures, car n est un entier naturel.

Au total: au bout de **15 heures**, le four peut être ouvert sans aucun risque.

Partie B: Modélisation continue

1. Déterminons les valeurs de a et b:

D'après l'énoncé, sur l'intervalle $[0;+\infty[$:

- $f(t) = a\,e^{-\frac{t}{5}} + b$
- $f'(t) = 4 - \frac{1}{5}\,f(t)$
- $f(0) = 1000$.

- **Détermination de " a ":**

$f(t) = a\,e^{-\frac{t}{5}} + b$, d'où: $f'(t) = -\frac{a}{5}\,e^{-\frac{t}{5}}$.

Dans ces conditions: $f'(0) = -\frac{a}{5}\,e^{-0}$ cad: $f'(0) = -\frac{a}{5}$.

Or, nous avons aussi: $f'(0) = 4 - \frac{1}{5}\,f(0)$ cad: $f'(0) = 4 - \frac{1}{5}(1000) = -196$.

En égalisant, nous obtenons: $-\frac{a}{5} = -196$ **cad**: $\mathbf{a = 980}$.

- **Détermination de " b ":**

$f(0) = 1000 \iff a\,e^{-0} + b = 1000$ cad: $a + b = 1000$ (1).

Comme $\mathbf{a = 980}$, (1) $\iff 980 + b = 1000$ **cad**: $\mathbf{b = 20}$.

Au total: $a = 980$ et $b = 20$.

Et nous pouvons écrire: $f(t) = 980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20$.

2. a. Déterminons la limite de la fonction f quand t tend vers $+\infty$:

Ici, il s'agit de calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} 980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20.$$

Or, d'après le cours: $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{5}} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{e^{\frac{t}{5}}}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^{X}}$, en posant: $X = \dfrac{t}{5}$

$= 0$.

Ainsi: $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} (980 \times 0 + 20)$

$= 20$.

Au total: $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 20$.

2. b. Etudions le sens de variation de la fonction f sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et dressons le tableau de variations:

Sur $[\,0\,;+\infty\,[$, nous savons que: $f'(t) = 4 - \dfrac{1}{5}(980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20)$.

Ainsi, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$: $f'(t) = -196\, e^{-\frac{t}{5}} < 0$.

Comme, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$, $f'(t) < 0$, nous pouvons affirmer que:

la fonction f est strictement décroissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Dans ces conditions, le tableau de variations de f est le suivant:

t	0	$+\infty$
f'	-	
f	c ↘	d

Avec: • $c = f(0) \Rightarrow c = 1000$,

• $d = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) \Rightarrow d = 20$.

2. c. Déterminons après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans aucun risque:

Pour répondre à cette question, nous devons résoudre l'inéquation: $f(t) \leqslant 70$.

(comme Partie A, question 3.)

$$f(t) \leqslant 70 \iff 980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20 \leqslant 70$$

$$\iff e^{-\frac{t}{5}} \leqslant \frac{5}{98}$$

$$\iff \ln\left(e^{-\frac{t}{5}}\right) \leqslant \ln\left(\frac{5}{98}\right)$$

$$\iff -\frac{t}{5} \leqslant \ln\left(\frac{5}{98}\right)$$

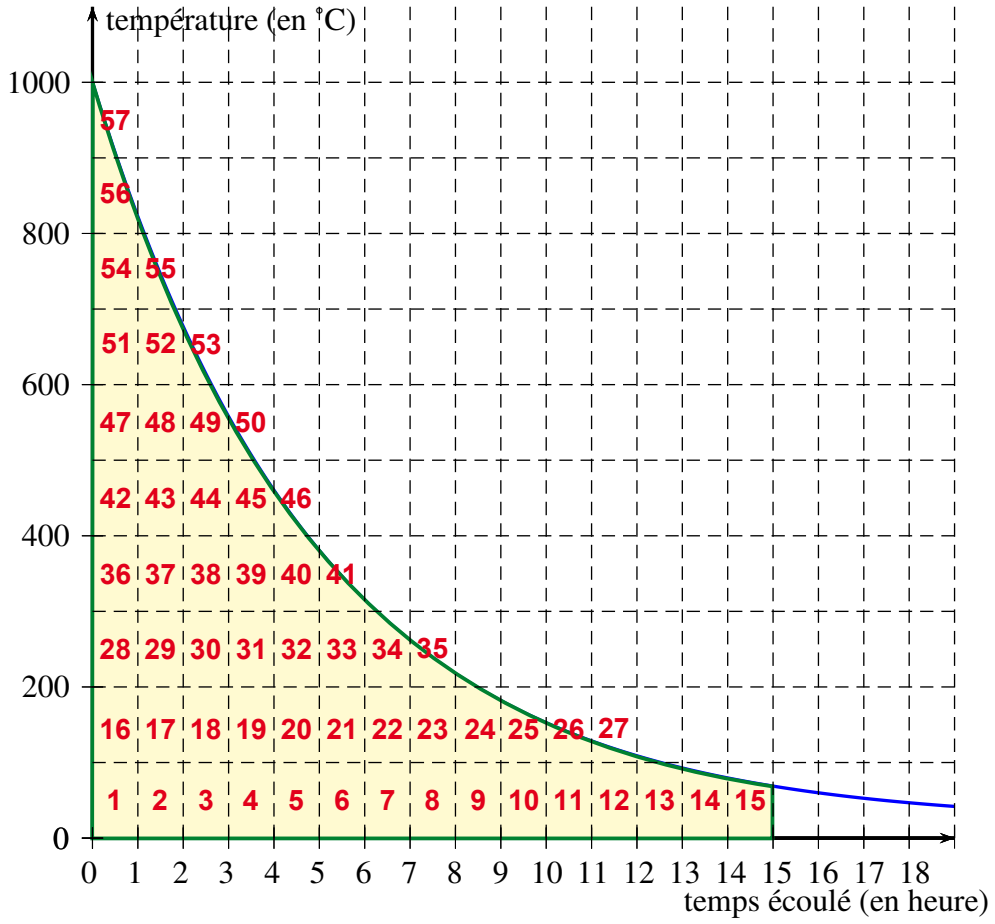
$$\iff t \geqslant -5 \ln\left(\frac{5}{98}\right)$$

$\Longleftrightarrow$ $t \geqslant 14,878$ heures **ou**: $t \geqslant 893$ **minutes**.

Au total: au bout de **893 minutes**, le four peut être ouvert sans aucun risque.

3. a. Donnons une estimation de la température moyenne θ du four sur les 15 premières heures de refroidissement (à l'aide du graphique):

Soit le graphique suivant:



En comptant le nombre de rectangles complets, nous obtenons un total de:

$13 + 8 + 6 + 4 + 3 + 2 + 2 = 38$ rectangles.

L_1 L_2 L_3 L_4 L_5 L_6 L_7

De plus et de manière approximative:

- le 27 et le 14 ≈ 1 rectangle,
- le 26 et le 25 ≈ 1 rectangle,
- le 35 et le 15 ≈ 1 rectangle,
- le 41 et le 34 ≈ 1 rectangle,
- le 46 et le 45 ≈ 1 rectangle,
- le 50 et le 49 ≈ 1 rectangle,
- le 54 et le 53 ≈ 1 rectangle,
- le 57 et le 56 ≈ 1 rectangle.

Dans ces conditions, nous avons au total:

38 rectangles + 8 rectangles (environ) ≈ 46 rectangles.

Notons qu'un rectangle représente: 100 x 1 = 100 unités d'aire.

D'où: 46 rectangles x 100 = 4600 unités d'aire.

Ainsi, une estimation de la température moyenne θ du four sur les 15 premières heures de refroidissement est d'environ: $\frac{1}{15} \times 4600 \approx 307$ degrés Celsius.

3. b. b1. Calculons la valeur exacte de cette température moyenne θ:

La température moyenne du four entre deux instants t_1 et t_2 nous est donnée par la formule: $\theta = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$.

Sur les 15 premières heures de refroidissement, cette température moyenne est donc égale à: $\theta = \frac{1}{15 - 0} \int_{0}^{15} f(t)\,dt$.

f est continue sur [0; 15], elle admet donc des primitives sur [0; 15] et par conséquent: θ existe.

$$\theta = \frac{1}{15 - 0} \int_0^{15} f(t)\, dt.$$

$$= \frac{1}{15} \int_0^{15} (980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20)\, dt$$

$$= \frac{1}{15} [\, 980\, (-5\, e^{-\frac{t}{5}} + 20\, t)]_0^{15}$$

$$= \frac{980}{15} (\, (-5\, e^{-3} + 300) - (5)\,)$$

$$= \frac{980}{3} (\, (1 - e^{-3}) + 20\,).$$

Ainsi, la valeur exacte de θ est: $\theta = \frac{980}{3} (\, (1 - e^{-3}) + 20\,).$

3. b. b2. Donnons la valeur arrondie de θ en degré Celsius:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons comme valeur arrondie de θ en degré Celsius: $\theta \approx 330,4$ degrés Celsius.

4. a. Vérifions que pour tout réel $t > 0$, $d(t) = 980\, (1 - e^{-\frac{1}{5}})\, e^{-\frac{t}{5}}$:

D'après l'énoncé: $d(t) = f(t) - f(t+1)$.

D'où: $d(t) = (980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20) - (980\, e^{-\frac{(t+1)}{5}} + 20)$

$$= 980\, e^{-\frac{t}{5}} - 980\, e^{-\frac{t}{5}} \times e^{-\frac{1}{5}}$$

$$= 980\, (1 - e^{-\frac{1}{5}})\, e^{-\frac{t}{5}}.$$

Au total, pour tout réel $t > 0$: $d(t) = 980\,(1 - e^{-\frac{1}{5}})\,e^{-\frac{t}{5}}$.

4. b. b1. Calculons la limite en $+\infty$ de $d(t)$:

$$\lim_{t \to +\infty} d(t) = \lim_{t \to +\infty} 980\,(1 - e^{-\frac{1}{5}})\,e^{-\frac{t}{5}}$$

$= 0$, car d'après Partie B 2. a.: $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{5}} = 0$.

Ainsi: $\lim\limits_{t \to +\infty} d(t) = 0$.

4. b. b2. Donnons une interprétation de ce résultat:

Nous avons donc: $\lim\limits_{t \to +\infty} d(t) = 0$.

Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'heures: la température finira par se stabiliser autour de 20 degrés Celsius.

20 degrés Celsius car: • $\lim\limits_{t \to +\infty} d(t) = 0 \iff \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t+1)$,

et: • $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 20$ degrés Celsius.