Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES
AU BACCALAURÉAT S

PROBABILITÉS, BAC S
(probas discrètes et probas à densité)

- Arbre de probabilités
- Probabilités conditionnelles
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Espérance mathématique
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale centrée réduite
- Loi normale
- Intervalle de confiance
- Intervalle de fluctuation asymptotique
- Longueur d'un intervalle

EXERCICE 2

[France Métropolitaine 2019]

Partie A:

1. a. Calculons la durée moyenne d'une partie de type A:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X_A suit une loi uniforme sur [9 ; 25].

Dans ces conditions:

- $f(x_A) = \begin{cases} \dfrac{1}{25-9} & \text{si } x_A \in [\,9\,;25\,] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- $E(X_A) = \dfrac{9+25}{2}$.

- $P(a \leqslant X_A \leqslant b) = \left[\dfrac{x_A}{25-9}\right]_a^b$.

Ici, il s'agit de calculer la durée moyenne d'une partie de type A.

Cela revient à calculer: $E(X_A)$.

Or: $E(X_A) = \dfrac{9+25}{2}$ **cad**: $E(X_A) = 17$ minutes.

Au total, la durée moyenne d'une partie de type A est de: 17 minutes.

1. b. Précisons à l'aide du graphique la durée moyenne d'une partie de type B:

La courbe représentative, donnée dans l'énoncé, correspond à celle de la densité de probabilité de la loi normale.

Elle a pour axe de symétrie, la droite d'équation: $x = 17$.

Donc nous pouvons affirmer que la durée moyenne d'une partie de type B est: $E(X_B) = 17$ minutes.

Au total, la durée moyenne d'une partie de type B est de: 17 minutes.

Et nous avons donc: X_B suit une loi normale d'espérance $\mu = 17$ mn et d'écart type $\sigma = 3$ mn.

2. Déterminons la probabilité que la durée d'une partie soit inférieure à une durée de 20 minutes:

• Avec le jeu A:

$$P(X_A \leqslant 20) = P(9 \leqslant X_A \leqslant 20)$$

$$= \left[\frac{x_A}{25 - 9} \right]_9^{20}$$

$$= \frac{20 - 9}{16} \quad \text{cad:} \quad P(X_A \leqslant 20) \approx 68,75\% = A.$$

• Avec le jeu B:

$$P(X_B \leqslant 20) = P\left(\frac{X_B - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{20 - 17}{3} \right)$$

$$= P(T \leqslant 1),$$ avec: T suit la loi normale centrée réduite.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$P(X_B \leqslant 20) \approx 84,13\% = B$.

• **Conclusion**:

La probabilité demandée est donc égale à: $\dfrac{A+B}{2} = 76,44\%$.

Au total, la probabilité pour que la durée d'une partie soit inférieure à 20 minutes est d'environ: 76%, au centième près.

Partie B:

1. a. Recopions et complétons l'arbre de probabilités:

D'après l'énoncé, nous avons:

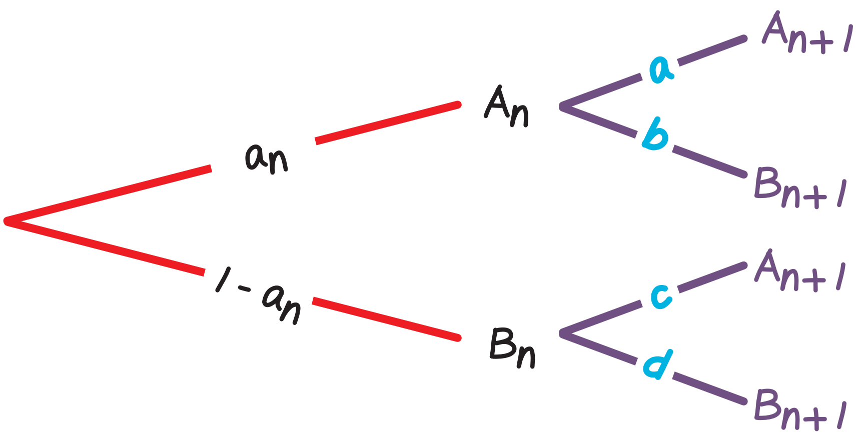
• A_n = " la n-ième partie est de type A ".
• B_n = " la n-ième partie est de type B ".

• $P(A_n) = a_n$
• $P(B_n) = 1 - a_n$.

• $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0,8$
• $P_{A_n}(B_{n+1}) = 1 - 0,8 = 0,2$.

• $P_{B_n}(B_{n+1}) = 0,7$
• $P_{B_n}(A_{n+1}) = 1 - 0,7 = 0,3$.

D'où l'arbre de probabilités complété suivant:



, avec: $\cdot a = 0,8$; $\cdot b = 0,2$; $\cdot c = 0,3$; $\cdot d = 0,7$.

1. b. Montrons que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$:

Il s'agit donc de calculer: $P(A_{n+1})$.

L'événement $A_{n+1} = (A_{n+1} \cap A_n) \cup (A_{n+1} \cap B_n)$.

D'où: $P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n)$

$$= P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n).$$

Ainsi: $P(A_{n+1}) = 0,8 \times a_n + 0,3 \times (1 - a_n)$ **cad**: $P(A_{n+1}) = 0,5\,a_n + 0,3$.

Au total, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, nous avons:

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = 0,5a_n + 0,3.$$

2. a. Démontrons que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$, avec $a_1 = a = 0,5$ ".

Initialisation: $a_1 = a = 0,5$ et $0 \leqslant 0,5 \leqslant 0,6$.

Donc: $0 \leqslant a_1 \leqslant 0,6$.

Donc **vrai au rang " 1 "**.

Hérédité: Soit $n \geq 1$, un entier naturel, supposons $0 \leq a_n \leq 0,6$

et montrons qu'alors: $0 \leq a_{n+1} \leq 0,6$.

Supposons: $0 \leq a_n \leq 0,6$, pour un entier naturel $n \geq 1$ fixé.

(1)

(1) $\Rightarrow$ $0,5 \times 0 \leq 0,5 \times a_n \leq 0,5 \times 0,6$

$\Rightarrow$ $0,5 \times 0 + 0,3 \leq 0,5 \times a_n + 0,3 \leq 0,5 \times 0,6 + 0,3$

($a_{n+1} = 0,5 \times a_n + 0,3$)

$\Rightarrow$ $0,3 \leq 0,5 \times a_n + 0,3 \leq 0,6$

$\Rightarrow$ $0 \leq a_{n+1} \leq 0,6$.

Conclusion: Pour tout entier naturel $n \geq 1$, nous avons bien: $0 \leq a_n \leq 0,6$.

2. b. Montrons que la suite (a_n) est croissante:

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer le signe de: $a_{n+1} - a_n$.

$a_{n+1} - a_n = 0,5a_n + 0,3 - a_n$

$= -0,5a_n + 0,3$.

Or, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $0 \leq a_n \leq 0,6$.

Dans ces conditions: $-0,6 \leq -a_n \leq 0$

$\Leftrightarrow$ $-0,6 \times 0,5 \leq -0,5 \times a_n \leq 0 \times 0,5$

$\Leftrightarrow$ $-0,6 \times 0,5 + 0,3 \leq -0,5 \times a_n + 0,3 \leq 0 + 0,3$

$\Leftrightarrow$ $0 \leq a_{n+1} - a_n \leq 0,3$.

Au total, comme pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$: la suite (a_n) est croissante.

2. c. Montrons que la suite (a_n) est convergente et précisons sa limite:

D'après le cours, nous savons que toute suite croissante et majorée est convergente.

Or ici: • La suite (a_n) est croissante pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

• $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Donc la suite (a_n) est majorée par $M = 0,6$.

Dans ces conditions: la suite (a_n) étant croissante et majorée, elle est convergente pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Soit ℓ la limite vers laquelle converge la suite (a_n).

Par unicité de la limite, ℓ est telle que: $\ell = 0,5\,\ell + 0,3$ **cad**: $\boldsymbol{\ell = 0,6}$.

$(a_{n+1} = 0,5\,a_n + 0,3)$

Ainsi: la suite (a_n) converge vers **0, 6**.

3. a. Montrons que la suite (a_n) est géométrique:

D'après l'énoncé, nous avons pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $U_n = a_n - 0,6$.

D'où: $U_n = a_n - 0,6 \iff U_{n+1} = a_{n+1} - 0,6$

$\iff U_{n+1} = (0,5\,a_n + 0,3) - 0,6 \quad (1)$.

Or: $U_1 = a_1 - 0,6 \Rightarrow U_1 = 0,5 - 0,6 = -0,1$ et $a_n = U_n + 0,6$.

Ainsi: (1) $\iff U_{n+1} = (0,5\,[\,U_n + 0,6\,] + 0,3) - 0,6$

$\Rightarrow U_{n+1} = 0,5\,U_n$.

Par conséquent, (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $U_1 = -0,1$. $(a - 0,6)$

3. b. Déduisons-en que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$:

Nous savons que: * $U_n = (a - 0,6) \times (0,5)^{n-1}$ (d'après le cours)

* $a_n = U_n + 0,6$.

D'où: $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

3. c. c1. Déterminons la limite de la suite (a_n):

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} (a - 0,6) \times (0,5)^{n-1} + 0,6$$

$$= \mathbf{0,6} \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} (0,5)^{n-1} = 0, \text{ car: } 0,5 \in \,]\,0\,;\,1\,[.$$

Au total: la limite de la suite (a_n) est égale à $0,6$.

3. c. c2. Cette limite dépend-elle de " a " ?

Non, cette limite ne dépend pas de la valeur de " a " car **$0,5 \in \,]\,0\,;\,1\,[$**.

3. d. La publicité la plus vue ?

Comme $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0,6$, cela signifie qu'au bout d'un très grand nombre de parties, ce sont les parties A qui apparaîtront le plus souvent **(60% des cas)**.

Donc la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo sera: la publicité A.