Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT S

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE, BAC S

- Droites et Plans
- Triangle rectangle, Théorème de Pythagore
- Triangle isocèle
- Tétraèdre
- Distance entre deux points
- Vecteurs colinéaires ou coplanaires
- Droites sécantes
- Produit scalaire et Norme d'un vecteur
- Vecteurs orthogonaux
- Représentation paramétrique d'une droite
- Equation cartésienne d'un plan
- Théorème du Toit

EXERCICE 4

[France Métropolitaine 2019]

Partie A:

1. Construisons le point M:

Le point M est le point d'intersection entre le plan (FHK) et la droite (AE).

Graphique à la fin du corrigé !

2. Construisons la section du cube par le plan $\mathscr{P}$:

Graphique à la fin du corrigé !

Partie B:

1. a. Montrons que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FHK):

D'après le cours: un vecteur $\vec{n}$ (4; 4; -3) est normal à un plan ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

Ici: • il s'agit du plan (FHK);

• 2 vecteurs non colinéaires de ce plan sont: $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FK}$;

• $\vec{n}$ (4; 4; -3).

Or dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } K\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{4}\\0\end{pmatrix}.$$

D'où: $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{4}\\-1\end{pmatrix}$.

Ainsi: • $\vec{n}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont orthogonaux car: $(4 \times (-1)) + (4 \times 1) + ((-3) \times 0) = 0$;

• $\vec{n}$ et $\overrightarrow{FK}$ sont orthogonaux car: $(4 \times (-1)) + (4 \times (\frac{1}{4})) + ((-3) \times (-1)) = 0$.

Dans ces conditions: $\vec{n}$ est bien normal au plan (FHK).

Au total: le vecteur $\vec{n}$ (4; 4; -3) est bien un vecteur normal au plan (FHK).

1. b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (FHK):

Ici: • $\vec{n}$ $(a = 4;\ b = 4;\ c = -3)$;

• H (0; 1; 1) est un point de l'espace.

D'où une équation cartésienne du plan passant par H et de vecteur normal $\vec{n}$ est: $a(x - x_H) + b(y - y_H) + c(z - z_H) = 0$

$\Longleftrightarrow\ 4\,(x-0)+4\,(y-1)+(-3)\,(z-1)=0$

$\Longleftrightarrow\ 4x+4y-3z-1=0.$

En conclusion, une équation cartésienne du plan (FHK) est bien:

$$4x+4y-3z-1=0.$$

1. c. Déterminons une équation du plan $\mathcal{P}$:

Nous savons que le plan $\mathcal{P}$ est le plan passant par $I\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ et parallèle au plan (FHK).

Dans ces conditions, le vecteur normal $\vec{n}$ est commun aux deux plans.

D'où une équation cartésienne du plan passant par I et de vecteur normal $\vec{n}$ est: $4\,(x-x_I)+4\,(y-y_I)+(-3)\,(z-z_I)=0$

$\Longleftrightarrow\ 4\,(x-\frac{1}{2})+4\,(y-0)-3\,(z-1)=0$

$\Longleftrightarrow\ 4x+4y-3z+1=0.$

En conclusion, une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est:

$$4x+4y-3z+1=0.$$

1. d. Calculons les coordonnées du point M':

M' est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (AE).

Une représentation paramétrique de la droite (AE), passant par E (0; 0; 1), est:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Soit **M' (x'; y'; z')**, un point appartenant à la droite (AE).

M' appartient aussi au plan $\mathscr{P}$ ssi ses coordonnées vérifient: $\mathbf{4x + 4y - 3z + 1 = 0}$.

D'où: $4x' + 4y' - 3z' + 1 = 0 \iff 4 \times 0 + 4 \times 0 - 3 \times t + 1 = 0$ **cad**: $t = \frac{1}{3}$.

Dans ces conditions, les coordonnées du point M' sont:

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Au total, les coordonnées du point M' sont: $\left(0; 0; \frac{1}{3}\right)$.

2. a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ:

Δ est la droite passant par le point E et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

Une représentation paramétrique de la droite Δ, passant par E (0; 0; 1) et de vecteur normal $\vec{n}$ (4; 4; -3) (vecteur directeur) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 4t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Au total, une représentation paramétrique de la droite Δ est:

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 4t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. b. Calculons les coordonnées du point L:

L est le point d'intersection du plan (ABC) et de la droite Δ.

Une représentation paramétrique de la droite Δ, passant par E (0; 0; 1), est:

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 4t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

Soit $L\ (x_L ; y_L ; z_L)$, un point appartenant à la droite Δ.

L appartient aussi au plan (ABC) ssi ses coordonnées vérifient: $z = 0$.

D'où: $z_L = 0 \iff 1 - 3t = 0$ cad: $t = \frac{1}{3}$.

Dans ces conditions, les coordonnées du point L sont:

$$\begin{cases} x_L = \frac{4}{3} \\ y_L = \frac{4}{3} \\ z_L = 0 \end{cases}.$$

Au total, les coordonnées du point L sont: $\left(\frac{4}{3} ; \frac{4}{3} ; 0\right)$.

2. c. Traçons la droite Δ sur la figure:

Graphique à la fin du corrigé !

2. d. d1. Les droites Δ et (BF) sont-elles sécantes ?

Les droites Δ et (BF) ne se coupent pas ; elles ne sont donc pas sécantes.

2. d. d2. Les droites Δ et (CG) sont-elles sécantes ?

Oui, elles sont sécantes et se coupent au point $W\left(1\,;\,1\,;\,\frac{1}{4}\right)$.