Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU VENDREDI 22 JUIN 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Obligatoire Coefficient : 7

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

Exercice 2 (4 points) **Commun à tous les candidats**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

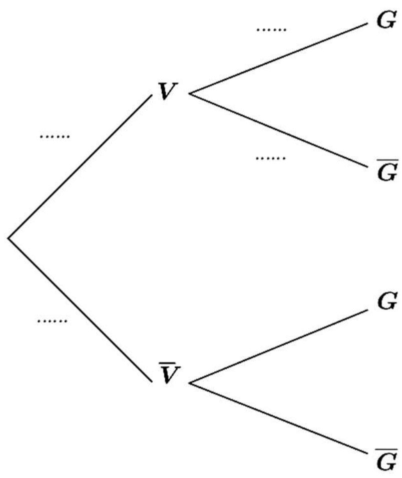
L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40% de la population est vaccinée ;
- 8% des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20% de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements :
V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;
G : « la personne a contracté la grippe ».

1. **a.** Donner la probabilité de l'événement G.

b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

3. On interroge un échantillon de 3750 habitants de la ville, c'est-à-dire que l'on suppose ici que $n = 3750$.
On note Z la variable aléatoire définie par : $Z = \frac{X-1500}{30}$.

On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Z peut être approchée par la loi normale centrée réduite.

En utilisant cette approximation, déterminer la probabilité qu'il y ait entre 1450 et 1550 individus vaccinés dans l'échantillon interrogé.

EXERCICE 2

[France Métropolitaine 2018]

Partie A:

1. a. Donnons la probabilité de l'événement G:

D'après l'énoncé, nous avons:

- V = " la personne est vaccinée contre la grippe ".
- $\overline{V}$ = " la personne n'est pas vaccinée contre la grippe ".
- G = " la personne a contracté la grippe ".
- $\overline{G}$ = " la personne n'a pas contracté la grippe ".

- $P(V) = 40\%$
- $P(\overline{V}) = 1 - 40\% = 60\%$.

- $P_V(G) = 8\%$
- $P_V(\overline{G}) = 1 - 8\% = 92\%$.

- $P(G) = 20\%$
- $P(\overline{G}) = 1 - 20\% = 80\%$.

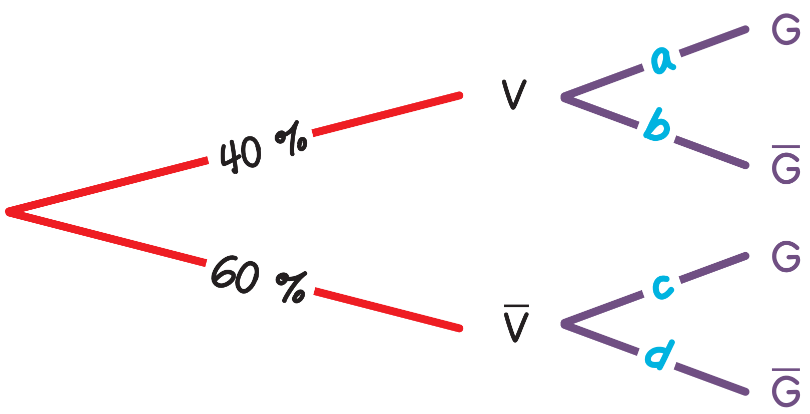
Ainsi, nous pouvons affirmer que:

$P(G) = 20\%$, car 20% de la population a contracté la grippe.

Au total, la probabilité de l'événement G est: $P(G) = 20\%$.

1. b. Traduisons la situation par un arbre pondéré:

Nous avons l'arbre pondéré suivant:



, avec:
- $a = 8\%$
- $b = 92\%$
- $c = ?$
- $d = ?$

.

2. Déterminons la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée:

Nous devons calculer: $P(G \cap V)$.

$P(G \cap V) = P_V(G) \times P(V)$.

Ainsi: $P(G \cap V) = 3,2\%$.

Au total: $P(G \cap V) = 3,2\%$.

3. Montrons que $P_{\overline{V}}(G) = 0,28$:

Nous devons calculer: $P_{\overline{V}}(G)$.

$$P_{\overline{V}}(G) = \frac{P(\overline{V} \cap G)}{P(\overline{V})}$$

$$= \frac{[P(G) - P(V \cap G)]}{P(\overline{V})}.$$

Ainsi: $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{[20\% - 3,2\%]}{60\%}$ cad: $P_{\overline{V}}(G) = 28\%$.

Au total: il y a 28% de chance pour qu'une personne choisie pas vaccinée, ait contracté la grippe.

Partie B:

1. Déterminons la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X:

Soit l'expérience aléatoire consistant à interroger au hasard n habitants de la ville: n tirages successifs indépendants et avec remise.

Soient les événements V = " l'habitant est vacciné ", et $\overline{V}$ = " l'habitant n'est pas vacciné ".

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

Nous sommes en présence de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de V suit donc une loi binômiale de paramètres: n et $p = 40\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\,(n;\ 40\%)$.

En fait, on répète n fois un schéma de Bernoulli.

2. a. Déterminons $P\,(X = 15)$:

Il s'agit de calculer ici: $P\,(X = 15)$ avec: $X \rightsquigarrow B\,(40;\ 40\%)$.

Or: $P\,(X = 15) = \binom{40}{15}\,(40\%)^{15}\,(1 - 40\%)^{25}$

=> $P\,(X = 15) \approx 12,3\%$, à 10^{-3} près.

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées est d'environ: 12,3%.

2. b. Déterminons la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée:

Il s'agit de calculer ici: $P(X \geqslant 20)$.

Or: $P(X \geqslant 20) = 1 - P(X \leqslant 19)$

$\Rightarrow$ $P(X \geqslant 20) \approx 13\%$, à 10^{-3} près.

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinées est d'environ: 13%.

3. Calculons $P(1450 \leqslant X \leqslant 1550)$:

D'après l'énoncé: $Z = \dfrac{X - 1500}{30}$ suit la loi normale centrée réduite.

Donc nous pouvons en déduire que la variable aléatoire X suit approximativement la loi normale d'espérance $\mu = 1500$ et d'écart type $\sigma = 30$.

Dans ces conditions:

$$P(1450 \leqslant X \leqslant 1550) = P\left(\frac{1450 - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{X - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{1550 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{1450 - 1500}{30} \leqslant Z \leqslant \frac{1550 - 1500}{30}\right)$$

$$= P\left(-\frac{5}{3} \leqslant Z \leqslant \frac{5}{3}\right) = 2 \times P\left(Z \leqslant \frac{5}{3}\right) - 1.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(1450 \leqslant X \leqslant 1550) = 2 \times P\left(Z \leqslant \frac{5}{3}\right) - 1$$

$$\approx 90,4\%, \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Au total, la probabilité qu'il y ait entre 1450 et 1550 individus vaccinés dans l'échantillon est d'environ: 90, 4%.