Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT S

ARITHMÉTIQUE ET MATRICES, BAC S

- Arithmétique
- PGCD
- Congruence
- Théorème de Gauss
- Théorème de Bézout
- Nombres premiers
- Matrice inversible
- Matrice identité I_2
- Matrice diagonale D
- Matrice inverse P^{-1}
- $M = PDP^{-1}$

EXERCICE 4

[Antilles-Guyane 2019]

1. a. Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0,5\ a_n + 0,1\ b_n + 0,2\ c_n$:

Pour tout entier naturel n, soient les événements:

- A_n = " le temps est ensoleillé au bout de n jours ",
- B_n = " le temps est nuageux sans pluie au bout de n jours ",
- C_n = " le temps est pluvieux au bout de n jours ".

Ici, il s'agit de calculer: $a_{n+1} = P(A_{n+1})$.

L'événement $A_{n+1} = (A_{n+1} \cap A_n) \cup (A_{n+1} \cap B_n) \cup (A_{n+1} \cap C_n)$.

D'où: $P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap C_n)$

$$= P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) \times P(C_n).$$

Ainsi: $P(A_{n+1}) = 0,5 \times P(A_n) + 0,1 \times P(B_n) + 0,2 \times P(C_n)$

cad: $a_{n+1} = 0,5 \times a_n + 0,1 \times b_n + 0,2 \times c_n$.

0, 5 = si le temps est ensoleillé un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain = 0, 5;

0, 1 = si le temps est nuageux sans pluie un jour donné, la probabilité qu'il soit ensoleillé le lendemain = 1 - 0, 2 - 0, 7;

[$0,2 =$ si le temps est pluvieux un jour donné, la probabilité qu'il soit ensoleillé le lendemain $= 0,2$.]

Au total, nous avons bien: $a_{n+1} = 0,5\, a_n + 0,1\, b_n + 0,2\, c_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

1. b. **Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0,3\, a_n - 0,1\, b_n + 0,2$:**

D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n + b_n + c_n = 1$.

D'où: $c_n = 1 - a_n - b_n$ (1).

En remplaçant c_n par son expression (1) dans $a_{n+1} = 0,5\, a_n + 0,1\, b_n + 0,2\, c_n$, nous obtenons: $a_{n+1} = 0,5\, a_n + 0,1\, b_n + 0,2\,(1 - a_n - b_n)$

cad: $a_{n+1} = 0,3\, a_n - 0,1\, b_n + 0,2$.

Au total, nous avons bien: $a_{n+1} = 0,3\, a_n - 0,1\, b_n + 0,2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. a. **Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = M\, U_n + R$:**

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
- $a_{n+1} = 0,3\, a_n - 0,1\, b_n + 0,2$
- $b_{n+1} = 0,2\, a_n + 0,2$.

Dans ces conditions: $\begin{cases} a_{n+1} = 0,3\, a_n - 0,1\, b_n + 0,2 \\ b_{n+1} = 0,2\, a_n + 0,2 \end{cases}$

$$\iff \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\iff U_{n+1} = M\, U_n + R,$$

avec: $U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

Ainsi: $U_{n+1} = M\,U_n + R,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

2. b. Montrons que $\alpha = \beta = 0,25$:

$$Y = M\,Y + R \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 0,3\alpha - 0,1\beta + 0,2 \\ \beta = 0,2\alpha + 0,2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0,7\alpha + 0,1\beta = 0,2 \\ -0,2\alpha + \beta = 0,2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 0,25 \\ \beta = 0,25 \end{cases}.$$

Ainsi: $\alpha = \beta = 0,25$.

3. a. Vérifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = M\,V_n$:

Pour tout entier naturel n:
- $U_{n+1} = M\,U_n + R$
- $Y = M\,Y + R$
- $V_n = U_n - Y$.

Dans ces conditions: $V_{n+1} = U_{n+1} - Y$

$$= M\,U_n + R - MY - R$$

$$= M\,U_n - MY$$

$$= M\,(U_n - Y)$$

$$= M\,V_n.$$

Ainsi: $V_{n+1} = M\,V_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

3. b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = M^n\,V_0$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $V_n = M^n\,V_0$ ".

Initialisation: • $V_1 = M^1\,V_0$

$$= M\,V_0$$

$$= M\,(U_0 - Y) \qquad (V_n = U_n - Y)$$

$$= M\,U_0 - MY$$

$$= M\,U_0 - (Y - R)$$

$$= M\,U_0 - Y + R.$$

• **Et**: $V_1 = U_1 - Y$

$$= M\,U_0 + R - Y \qquad (U_{n+1} = M\,U_n + R)$$

$$= M\,U_0 - Y + R.$$

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $V_n = M^n \cdot V_0$
et montrons qu'alors $V_{n+1} = M^{n+1} \cdot V_0$.

Supposons: $V_n = M^n \cdot V_0$, pour un entier naturel non nul n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow M \cdot V_n = M \cdot M^n \cdot V_0$$

$$\Rightarrow M \cdot V_n = M^{n+1} \cdot V_0$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = M^{n+1} \cdot V_0.$$

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = M^n \cdot V_0$.

4. a. Déterminons l'expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$:

Ici, il s'agit de déterminer U_n.

Or: • $V_n = U_n - Y$

• $V_n = M^n \cdot V_0$.

D'où: $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = V_n + Y$

$$= M^n \cdot V_0 + Y$$

$$= M^n \cdot [\, U_0 - Y \,] + Y$$

$$= M^n \cdot \begin{pmatrix} 1 - 0,25 \\ 0 - 0,25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

[car: $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$]

$$= \begin{pmatrix} 1,75 \times 0,2^n - 0,1^n + 0,25 \\ \dots \quad . \quad \dots \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ est : $a_n = 1,75 \times 0,2^n - 0,1^n + 0,25$.

4. b. Déterminons la limite de la suite (a_n) :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} 1,75 \times 0,2^n - 0,1^n + 0,25$$

$= 0,25$, car : $0,2 \in]0;1[$ et $0,1 \in]0;1[$.

Au total, la limite de la suite (a_n) est égale à : $0,25$.

5. La probabilité que le temps soit pluvieux au bout de n jours peut-elle dépasser 0, 5 ?

Pour répondre à cette question, il suffit de résoudre l'inéquation : $c_n > 0,5$.

(et voir si cela est possible !)

$c_n > 0,5 \iff 0,5 + 3 \times 0,1^n - 3,5 \times 0,2^n > 0,5$

$\iff 3 \times 0,1^n > 3,5 \times 0,2^n$

$$\iff \left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{3,5}{3}$$

$$\iff n \ln\left(\frac{1}{2}\right) > \ln\left(\frac{3,5}{3}\right)$$

$$\iff n < \frac{\ln\left(\frac{3,5}{3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Or : $\dfrac{\ln\left(\frac{3,5}{3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ est strictement négatif.

Donc: il est impossible d'avoir $c_n > 0,5$!!

Au total: **impossible que la probabilité que le temps soit pluvieux au bout de n jours puisse dépasser 50%**.