Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES
AU BACCALAURÉAT S

PROBABILITÉS, BAC S
(probas discrètes et probas à densité)

- Arbre de probabilités
- Probabilités conditionnelles
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Espérance mathématique
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale centrée réduite
- Loi normale
- Intervalle de confiance
- Intervalle de fluctuation asymptotique
- Longueur d'un intervalle

EXERCICE 4

[Antilles-Guyane 2019]

Partie A:

1. Construisons un arbre pondéré illustrant la situation:

D'après l'énoncé, nous avons:

- M = " le téléspectateur a regardé le match ".
- E = " le téléspectateur a regardé l'émission ".

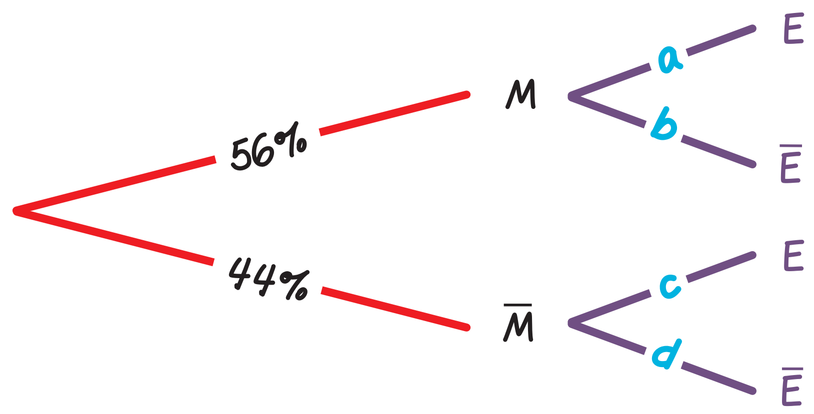
- $P(M) = 56\%$
- $P(\overline{M}) = 1 - 56\% = 44\%$.

- $P(E) = 16,2\%$
- $P(\overline{E}) = 1 - 16,2\% = 83,8\%$.

- $P_M(E) = \frac{1}{4} = 25\%$
- $P_M(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 75\%$.

- $P_{\overline{M}}(E) = x$
- $P_{\overline{M}}(\overline{E}) = 1 - x$.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec:
- $a = 25\%$
- $b = 75\%$
- $c = x$
- $d = 1 - x$.

2. Déterminons $P(M \cap E)$:

$P(M \cap E) = P_M(E) \times P(M)$.

Ainsi: $P(M \cap E) = 25\% \times 56\%$ **cad**: $P(M \cap E) = 14\%$.

Au total, la probabilité que le téléspectateur regarde le match et l'émission est de: 14%.

3. a. Vérifions que $P(E) = 0,44x + 0,14$:

Ici, il s'agit donc de calculer: $P(E)$.

L'événement $E = (E \cap M) \cup (E \cap \overline{M})$.

D'où: $P(E) = P(E \cap M) + P(E \cap \overline{M})$

$= P(M \cap E) + P_{\overline{M}}(E) \times P(\overline{M})$.

Ainsi: $P(E) = 14\% + x \times 44\%$ **cad**: $P(E) = 0,44x + 0,14$.

Au total, nous avons bien: $P(E) = 0,44x + 0,14$.

3. b. Déduisons-en la valeur de x:

D'après l'énoncé, nous savons que: $P(E) = 16,2\%$.

D'où, x est tel que: $0,44x + 0,14 = 16,2\%$.

Ainsi: $x = 5\%$.

Au total, la valeur de x est: $x = 5\%$.

4. Déterminons la probabilité arrondie à 10^{-2}, qu'il ait regardé le match sachant qu'il n'a pas regardé l'émission:

Ici, nous devons calculer: $P_{\bar{E}}(M)$.

$$P_{\bar{E}}(M) = \frac{P(\bar{E} \cap M)}{P(\bar{E})}$$

$$= \frac{P_M(\bar{E}) \times P(M)}{P(\bar{E})}.$$

Ainsi: $P_{\bar{E}}(M) = \dfrac{75\% \times 56\%}{83,8\%}$ **cad**: $P_{\bar{E}}(M) \approx 50\%$.

Au total, la probabilité demandée est d'environ: 50%.

Partie B:

1. Déterminons la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'un téléspectateur ait passé entre une heure et deux heures devant sa télévision le soir du match:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- T suit une loi normale d'espérance $\mu = 1,5$ heures et d'écart type $\sigma = 0,5$ heure.
- Y suit la loi normale centrée réduite.

Ici, nous devons calculer: $P(1 \leqslant T \leqslant 2)$.

Nous remarquons que: $1 = \mu - \sigma$ et $2 = \mu + \sigma$.

Or, d'après le cours: $P(\mu - \sigma \leqslant T \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,682$.

D'où: $P(1 \leqslant T \leqslant 2) \approx 0,682$.

Au total, la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'un téléspectateur ait passé entre une heure et deux heures devant sa télévision le soir du match est d'environ: $68,2\%$.

2. Déterminons l'arrondi à 10^{-2} du réel t tel que $P(T \geqslant t) = 0,066$ et interprétons:

Il s'agit de déterminer " t " sachant que: $P(T \geqslant t) = 0,066$.

$$P(T \geqslant t) = 0,066 \iff P\left(\frac{T-\mu}{\sigma} \geqslant \frac{t-1,5}{0,5}\right) = 0,066$$

$$\iff P(Y \geqslant 2t - 3) = 0,066$$

$$\iff 1 - P(Y \leqslant 2t - 3) = 0,066$$

$$\iff P(Y \leqslant 2t - 3) = 0,934.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$2t - 3 \approx 1,51$ cad: $t \approx 2,25$, à 10^{-2} près.

Au total: $P(T \geqslant t) = 0,066$ quand $t \approx 2,25$.

Cela signifie qu'il y a $6,6\%$ de chance pour que le téléspectateur ait passé plus de $2,25$ heures (soit 2 heures et 15 minutes) devant sa télévision le soir du match.

Partie C:

L'affirmation de l'usine est-elle correcte ?

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit une loi exponentielle de paramètre: $\lambda = ?$.
- $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$.
- $P(X \leqslant a) = \int_0^a f(x)\,dx$.
- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx$.
- $E(X) = \frac{1}{\lambda} \geqslant 3$ ans, $E(X)$ étant la durée de vie moyenne.

Il s'agit ici de déterminer la valeur de λ (pour pouvoir calculer $E(X)$) sachant que: $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \frac{1}{4}$.

$$P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \frac{1}{4} \iff \int_1^2 f(x)\,dx = \frac{1}{4}$$

$$\iff \int_1^2 \lambda\, e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{4}$$

$$\iff \Big[-e^{-\lambda x}\Big]_1^2 = \frac{1}{4}$$

$$\iff e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} - \frac{1}{4} = 0. \quad (1)$$

Posons: $Z = e^{-\lambda}$.

Dans ces conditions: $(1) \iff -Z^2 + Z - \frac{1}{4} = 0$.

$\Delta = 1 - 4 \times \frac{1}{4}$ cad: $\Delta = 0$.

D'où une solution unique dans $\mathbb{R}$: $Z = \frac{-1}{-2}$ cad: $Z = \frac{1}{2}$.

Ainsi: $e^{-\lambda} = 0,5$ ce qui revient à dire que: $\lambda = -\ln(0,5) \approx 0,693$.

Et donc: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ cad: $E(X) \approx 1,44$ ans.

Au total comme $E(X) \approx 1,44$ ans < 3 ans: l'affirmation de l'usine **n'est pas correcte**.