Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT S

PROBABILITÉS, BAC S

(probas discrètes et probas à densité)

- Arbre de probabilités
- Probabilités conditionnelles
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Espérance mathématique
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale centrée réduite
- Loi normale
- Intervalle de confiance
- Intervalle de fluctuation asymptotique
- Longueur d'un intervalle

EXERCICE 1

[Amérique du Nord 2019]

Partie A:

1. a. Calculons la probabilité que le tube soit accepté au contrôle:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit une loi normale d'espérance $\mu = 1,5$ mm et d'écart type $\sigma = 0,07$ mm.
- T suit la loi normale centrée réduite.

De plus, il est dit qu'un tube de type 1 est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre 1, 35 mm et 1, 65 mm.

Ainsi, nous devons calculer: $P(1,35 \leqslant X \leqslant 1,65)$.

$$P(1,35 \leqslant X \leqslant 1,65) = P\left(\frac{1,35 - 1,5}{0,07} \leqslant \frac{X - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{1,65 - 1,5}{0,07}\right)$$

$$= P\left(-\frac{15}{7} \leqslant T \leqslant \frac{15}{7}\right)$$

$$= 2 \times P\left(T \leqslant \frac{15}{7}\right) - 1,$$ d'après le cours.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$P(1,35 \leqslant X \leqslant 1,65) \approx 2 \times 0,9839 - 1$ cad: $P(1,35 \leqslant X \leqslant 1,65) \approx 96,8\%$, à 10^{-3} près.

Au total: il y a 96,8% de chance pour que le tube soit accepté au contrôle.

1. b. Déterminons une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_1 pour que la probabilité que ce tube soit accepté au contrôle soit égale à 0,98:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X_1 suit une loi normale d'espérance $\mu = 1,5$ mm et d'écart type $\sigma = \sigma_1$.
- Z suit la loi normale centrée réduite.

Ici, nous devons toujours calculer: $P(1,35 \leqslant X_1 \leqslant 1,65)$.

$$P(1,35 \leqslant X_1 \leqslant 1,65) = P\left(\frac{1,35 - 1,5}{\sigma_1} \leqslant \frac{X_1 - \mu}{\sigma_1} \leqslant \frac{1,65 - 1,5}{\sigma_1}\right)$$

$$= P\left(-\frac{0,15}{\sigma_1} \leqslant Z \leqslant \frac{0,15}{\sigma_1}\right)$$

$$= 2 \times P\left(Z \leqslant \frac{0,15}{\sigma_1}\right) - 1, \text{ d'après le cours.}$$

Or on désire que: $P(1,35 \leqslant X_1 \leqslant 1,65) = 0,98$.

Dans ces conditions: $P(1,35 \leqslant X_1 \leqslant 1,65) = 0,98$

$$\iff 2 \times P\left(Z \leqslant \frac{0,15}{\sigma_1}\right) - 1 = 0,98$$

$$\iff P\left(Z \leqslant \frac{0,15}{\sigma_1}\right) = 0,99.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{0,15}{\sigma_1} \approx 2,33 \text{ cad: } \sigma_1 \approx 0,064 \text{ mm, à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Au total, une valeur approchée à 10^{-3} près de σ, est environ: $0,064$ mm.

2. a. Donnons un intervalle de fluctuation asymptotique à 95% de la fréquence des tubes non " conformes pour la longueur " dans un échantillon de 250 tubes:

Ici, nous avons:
- $n = 250$
- $p = 2\%$
- $f = \dfrac{10}{250}$ cad: $f = 4\%$.

Dans ces conditions:

$n = 250 \geqslant 30$, $n \cdot p = 5 \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - p) = 245 \geqslant 5$.

Les conditions sont donc réunies.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \, ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \right],$$

cad: $I = \left[2\% - 1,96 \times \sqrt{\dfrac{2\% \times 98\%}{250}} \, ; 2\% + 1,96 \times \sqrt{\dfrac{2\% \times 98\%}{250}} \right]$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\, 0,3\% \, ; 3,8\% \,]$, à 10^{-3} près.

Ainsi, l'intervalle demandé est: $I \approx [\, 0,3\% \, ; 3,8\% \,]$.

2. b. Décide-t-on de réviser la machine ?

Ici, la fréquence " f ", sur l'échantillon, est telle que: $f = 4\% \notin I$.

Ainsi, **oui** il faut impérativement réviser la machine.

Partie B:

1. Recopions et complétons l'arbre de probabilités:

D'après l'énoncé, nous avons:

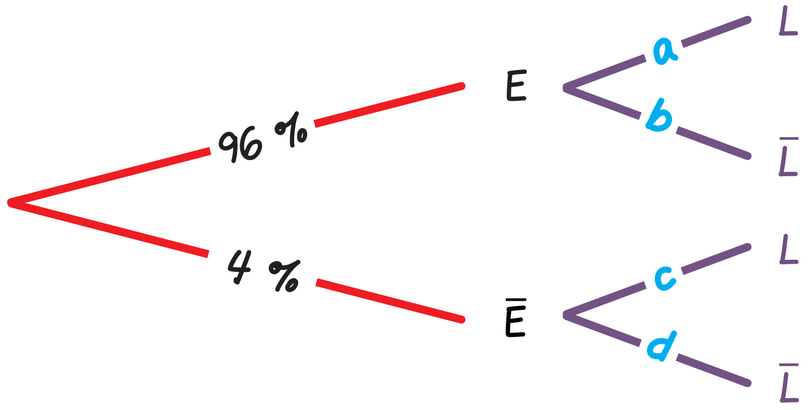
- E = " l'épaisseur du tube est conforme ".
- L = " la longueur du tube est conforme ".

- $P(E) = 96\%$
- $P(\bar{E}) = 1 - 96\% = 4\%$.

- $P_E(L) = 95\%$
- $P_E(\bar{L}) = 1 - 95\% = 5\%$.

- $P_{\bar{E}}(L) = \dfrac{P(\bar{E} \cap L)}{P(\bar{E})}$ **cad**: $P_{\bar{E}}(L) = \dfrac{3,6\%}{4\%} = 90\%$.
- $P_{\bar{E}}(\bar{L}) = 1 - 90\% = 10\%$.

D'où l'arbre de probabilités suivant:



, avec:
- $a = 95\%$
- $b = 5\%$
- $c = 90\%$
- $d = 10\%$

.

2. Montrons que $P(L) = 0,948$:

Calculons donc: $P(L)$.

L'événement $L = (L \cap E) \cup (L \cap \bar{E})$.

D'où: $P (L) = P (L \cap E) + P (L \cap \bar{E})$

$$= P_E (L) \times P (E) + P_{\bar{E}} (L) \times P (\bar{E}).$$

Ainsi: $P (L) = 95\% \times 96\% + 3,6\%$ cad: $P (L) = 94,8\%$.

Au total, nous avons bien: $P (L) = 94,8\%$.