Sujet Obligatoire

MATHÉMATIQUES

AMÉRIQUE DU NORD

BAC S - 2018

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Obligatoire **Coefficient : 7**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A.
On considère les points $B(10\,;\,-8\,;\,2)$, $C(-1\,;\,-8\,;\,5)$ et $D(14\,;\,4\,;\,8)$.

1.a) Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).

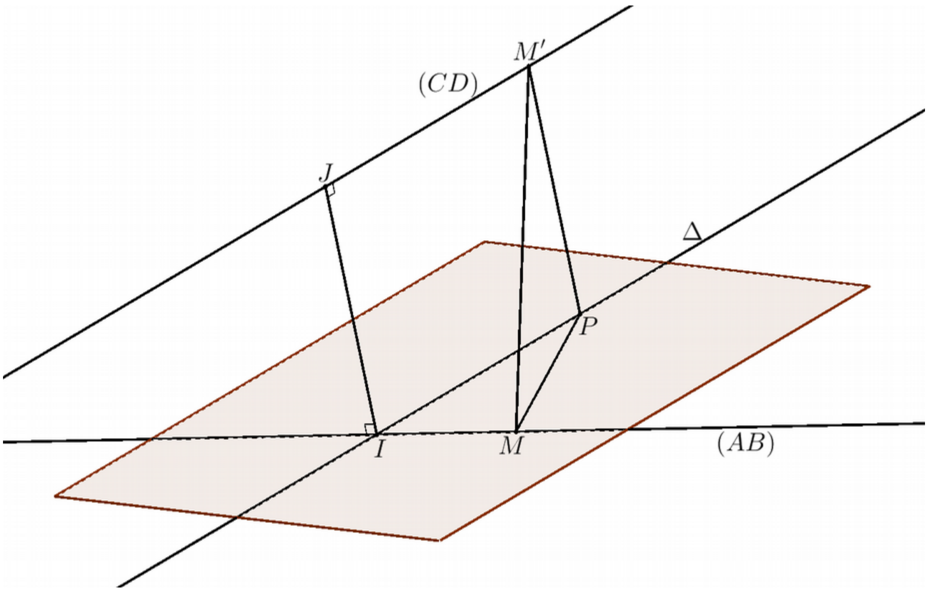
b) Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

2. On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.

a) Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ.

b) Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).
La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).

3. Cette question a pour but de vérifier que la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).
Sur le schéma ci-dessous on a représenté les droites (AB) et (CD), les points I et J, et la droite Δ parallèle à la droite (CD) passant par I.
On considère un point M de la droite (AB) distinct du point I.
On considère un point M' de la droite (CD) distinct du point J.



a) Justifier que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M' coupe la droite Δ en un point que l'on notera P.

b) Démontrer que le triangle MPM' est rectangle en P.

c) Justifier que $MM' > IJ$ et conclure.

EXERCICE 3

[Amérique du Nord 2018]

1. a. Déterminons un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD):

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot a \\ y = y_A + t \cdot b \\ z = z_A + t \cdot c \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

- En ce qui concerne la droite (AB):

Ici: • la droite (AB) passe par le point $A\,(0\,;0\,;0)$,

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (AB) est: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$,

cad: $\vec{u}\begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$, car: $B\,(10\,;-8\,;2)$.

D'où une représentation paramétrique de la droite (AB) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\,(10\,;-8\,;2)$ s'écrit:

$$(I) \quad \begin{cases} x = 10 \cdot t \\ y = -8 \cdot t \\ z = 2 \cdot t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

• En ce qui concerne la droite (CD):

Ici: • la droite (CD) passe par le point $C(-1; -8; 5)$,

• un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite (CD) est: $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$,

cad: $\vec{v}\begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$, car: $C(-1; -8; 5)$ et $D(14; 4; 8)$.

D'où une représentation paramétrique de la droite (CD) passant par C et de vecteur directeur $\vec{v}$ (15; 12; 3) s'écrit:

$$(II) \quad \begin{cases} x' = -1 + 15 \cdot t' \\ y' = -8 + 12 \cdot t' \\ z' = 5 + 3 \cdot t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Au total: nous venons de déterminer un système d'équations paramétriques pour chacune des droites (AB) et (CD).

1. b. Vérifions que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires:

D'après le cours, lorsque nous avons deux équations paramétriques de droites, pour démontrer qu'elles sont non coplanaires, nous devons montrer: • que les vecteurs directeurs des deux droites ne sont pas colinéaires,

et: • que les deux droites ne sont pas sécantes.

• **Ici, les vecteurs directeurs des droites (AB) et (CD) ne sont pas colinéaires:**

En effet, il n'existe pas de réel α tel que:

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}, \text{ avec: } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

• **Ici, les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes:**

En effet, les droites (AB) et (CD) sont sécantes ssi leur point d'intersection (s'il existe) vérifie le système:

$$(I) = (II) \iff \begin{cases} 10t = -1 + 15t' \\ -8t = -8 + 12t' \\ 2t = 5 + 3t' \end{cases}, t, t' \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} 15t' - 10t = 1 \\ 12t' + 8t = 8 \\ 3t' - 2t = -5 \end{cases}.$$

Or ce système est impossible: **la 1ère équation n'est pas égale à 5 fois la 3ème équation !**

Au total: les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

2. a. a1. Déterminons les coordonnées des points I et J:

• **En ce qui concerne le point I:**

Le point I appartient à la droite (AB), avec: $I\,(5 ; y_I ; z_I)$.

Dans ces conditions, ses coordonnées vérifient le système: **(I)**.

$$\text{Ainsi: } (I) \iff \begin{cases} 5 = 10t \\ y_I = -8t \\ z_I = 2t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \\ y_I = -8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right) \\ z_I = 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = 5 \\ y_I = -4 \\ z_I = 1 \end{cases}.$$

D'où: $I\,(5\,;-4\,;1)$.

• **En ce qui concerne le point J**:

Le point J appartient à la droite (CD), avec: $J\,(4\,;y_J\,;z_J)$.

Dans ces conditions, ses coordonnées vérifient le système: **(II)**.

Ainsi: **(II)** $\Longleftrightarrow \begin{cases} 4 = -1 + 15t' \\ y_J = -8 + 12t' \\ z_J = 5 + 3t' \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t' = \dfrac{1}{3} \\ y_J = -8 + 12 \times \left(\dfrac{1}{3}\right) \\ z_J = 5 + 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_J = 4 \\ y_J = -4 \\ z_J = 6 \end{cases}.$$

D'où: $J\,(4\,;-4\,;6)$.

2. a. a2. Déduisons-en la distance IJ:

La distance IJ est: $IJ = \sqrt{(4-5)^2 + (-4+4)^2 + (6-1)^2}$

cad: $IJ = \sqrt{26}$.

D'où la distance IJ est égale à: $\sqrt{26}$.

2. b. Montrons que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD):

Nous avons: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\-8\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}15\\12\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$.

Ici la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD) car:

- $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$: $-1\times 10+0\times(-8)+5\times 2=0$,
- $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{CD}=0$: $-1\times 15+0\times 12+5\times 3=0$.

Au total: la droite (IJ) est perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).

3. a. Justifions que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M' coupe la droite Δ en un point P:

Notons préalablement que:
- les droites (AB) et (IJ) ont le point **I** en commun;
- les droites (CD) et (IJ) ont le point J en commun.

Ainsi, comme le point M' est sur la droite (CD) et n'est pas le point I, le point M' n'appartient pas à la droite (IJ).

Les points I, J et M' définissent donc un unique plan (IJM').

De plus, les droites (CD) et Δ sont coplanaires car elles sont parallèles, et elles sont contenues dans le plan (IJM').

D'où dans le plan (IJM'), la droite (IJ) est sécante à la droite Δ en I et donc la parallèle à la droite (IJ) passant par M' coupe la droite Δ en un point P.

Au total: la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M' coupe la droite Δ en un point P.

3. b. Démontrons que le triangle MPM' est rectangle en P:

Les droites (AB) et Δ ont le point I en commun.

Ces deux droites ne sont pas confondues car sinon (AB) et (CD) seraient parallèles, ce qui est impossible du fait de la question **1. b.**

Ces deux droites sont donc sécantes et définissent ainsi un plan $\mathscr{P}$.

De plus, la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).

D'où, comme Δ est parallèle à (CD), la droite (IJ) est par conséquent orthogonale à Δ.

Ainsi: la droite (IJ) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ et la droite (M'P), qui est parallèle à la droite (IJ), est aussi perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Donc la droite (M'P) est orthogonale à toutes les droites du plan $\mathscr{P}$, la droite (PM) comprise.

Au total: le triangle MPM' est bien rectangle en P.

3. c. Justifions que MM' > IJ et concluons:

Notons que:
- les droites (JM') et (IP) sont parallèles,
- les droites (JI) et (M'P) sont parallèles.

D'où le quadrilatère M'JIP est bien un parallélogramme avec M'P = JI.

D'où, d'après le théorème de Pythagore:

$$MM' = \sqrt{(M'P)^2 + (PM)^2} \geqslant \sqrt{(M'P)^2} = IJ.$$

En conclusion, comme M et M' sont des points des droites (AB) et (CD) avec M $\neq I$ et M' $\neq$ J: MM' > IJ.

La distance IJ correspond à la plus petite distance entre les droites (AB) et (CD).