Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT ES

PROBABILITÉS, BAC ES

(probas discrètes et probas à densité)

- Arbre de probabilités
- Arbre pondéré
- Probabilités conditionnelles
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Espérance mathématique
- Loi uniforme
- Loi normale centrée réduite
- Loi normale
- Intervalle de confiance
- Intervalle de fluctuation asymptotique
- Longueur d'un intervalle

EXERCICE 4

[Liban 2019]

Partie A:

1. **Déterminons la loi suivie par X en justifiant:**

Soit l'expérience aléatoire consistant à interroger 300 personnes choisies au hasard pour savoir si elles jettent régulièrement des produits polluants dans les canalisations.

On estime que la population est suffisamment grande pour que ce choix de 300 personnes soit assimilable à 300 tirages avec remise.

Soient les événements $R =$ " la personne est respectueuse ", et $\overline{R} =$ " la personne n'est pas respectueuse ".

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes respectueuses de l'environnement dans un échantillon de 300 personnes choisies au hasard.

Nous sommes en présence de 300 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: R et $\overline{R}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de R suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 300$ et $p = 72\%$.

Et nous pouvons noter: $X \leadsto B\,(300\,;\,72\%)$.

En fait, on répète 300 fois un schéma de Bernoulli.

2. Calculons $P(X = 190)$:

Il s'agit de calculer ici: $P(X = 190)$.

$P(X = 190) = \binom{300}{190}(72\%)^{190}(1 - 72\%)^{110}$ **cad**: $P(X = 190) \approx 0,0002$, **à l'aide d'une machine à calculer**.

Au total, la probabilité que 190 personnes soient respectueuses de l'environnement est d'environ: $0,0002$.

3. Calculons la probabilité qu'au moins 220 personnes soient respectueuses de l'environnement:

Il s'agit de calculer ici: $P(X \geqslant 220)$.

$P(X \geqslant 220) = 1 - P(X < 220)$

$= 1 - P(X \leqslant 219)$.

Ainsi, à l'aide d'une machine à calculer, nous obtenons:

$$P(X \geqslant 220) \approx 0,3291.$$

Au total, la probabilité qu'au moins 220 personnes soient respectueuses de l'environnement est d'environ: $32,91\%$.

Partie B:

1. Résolvons dans IR, l'inéquation $2x^2 - 7x - 4 \geqslant 0$:

Soit l'équation: $2x^2 - 7x - 4 = 0$.

$\Delta = 49 - 4 \times 2 \times (-4) = 81$

cad: $\Delta = (9)^2 > 0$.

D'où 2 solutions dans IR: • $x' = \frac{7-9}{4}$ cad: $x' = -\frac{1}{2}$,

• $x'' = \frac{7+9}{4}$ cad: $x'' = 4$.

Ainsi, l'ensemble des solutions S de l'inéquation est: $S =]-\infty ; -\frac{1}{2}] \cup [4 ; +\infty[$.

2. Calculons la probabilité que ce nombre soit solution de l'inéquation:

Pour répondre à cette question, nous allons avoir recours à la loi uniforme.

Soit T une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a ; b]$.

Dans ces conditions, d'après le cours, nous avons:

• $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a ; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

• $E(T) = \frac{a+b}{2}$.

• $P(c \leqslant T \leqslant d) = \left[\frac{t}{b-a} \right]_d^c$.

Or ici, il s'agit de calculer: $P(4 \leqslant T \leqslant 10)$* sachant que T suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

D'où: $P(4 \leqslant T \leqslant 10) = \left[\frac{t}{10-0} \right]_4^{10}$ cad: $P(4 \leqslant T \leqslant 10) = \frac{6}{10} = 60\%$.

Ainsi, la probabilité que ce nombre soit solution de l'inéquation est de: 60%.

*: en effet, le nombre choisi au hasard dans l'intervalle $[0 ; 10]$ est solution de l'inéquation ssi il appartient à $[4 ; 10]$.

Partie C:

1. a. Calculons $P(2,18 \leqslant Z \leqslant 2,42)$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- Z suit une loi normale d'espérance $\mu = 2,3$ et d'écart type $\sigma = 0,11$.
- Y suit la loi normale centrée réduite.

Ici, nous devons calculer: $P(2,18 \leqslant Z \leqslant 2,42)$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$P(2,18 \leqslant Z \leqslant 2,42) \approx 0,72$, en arrondissant à 10^{-2}.

Au total: $P(2,18 \leqslant Z \leqslant 2,42) \approx 72\%$.

1. b. Calculons $P(Z \geqslant 2,25)$:

Ici, nous devons calculer: $P(Z \geqslant 2,25)$.

$$P(Z \geqslant 2,25) = P\left(\frac{Z-\mu}{\sigma} \geqslant \frac{2,25-2,3}{0,11}\right)$$

$$= P\left(Y \geqslant -\frac{5}{1,1}\right)$$

$$= 1 - P\left(Y \geqslant \frac{5}{1,1}\right)$$

$$= P\left(Y \leqslant \frac{5}{1,1}\right).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$P\left(Y \leqslant \frac{5}{1,1}\right) \approx 0,68$ cad: $P(Z \geqslant 2,25) \approx 0,68$, en arrondissant à 10^{-2}.

Au total: $P(Z \geqslant 2,25) \approx 68\%$.

2. Donnons une valeur approchée de σ:

A présent:

- Z suit une loi normale d'espérance $\mu = 2,3$ et d'écart type $\sigma = x$.

Ici, nous devons déterminer x tel que: $P(2,18 \leqslant Z \leqslant 2,42) = 0,95$.

D'après le cours, nous savons que: $P(\mu - 2\sigma \leqslant Z \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

Donc en arrondissant à 10^{-2}, nous avons: $P(\mu - 2\sigma \leqslant Z \leqslant \mu + 2\sigma) = 0,95$.

Ainsi par identification: $\begin{cases} \mu - 2\sigma = 2,18 \\ \mu + 2\sigma = 2,42 \end{cases}$ (1).

(1) $\iff \begin{cases} 2,3 - 2x = 2,18 \\ 2,3 + 2x = 2,42 \end{cases}$ cad: $x = 0,06$.

Au total: quand $\sigma = 0,06$, $P(2,18 \leqslant Z \leqslant 2,42) = 0,95$.

Et donc, Z suit une loi normale de paramètres: $\mu = 2,3$ et $\sigma = 0,06$.