Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT ES

FONCTIONS ET INTÉGRALES, BAC ES

- Fonctions
- Domaine de définition
- Dérivées : f' et f''
- Sens de variation d'une fonction
- Fonction croissante, fonction décroissante
- Tableau des variations d'une fonction
- Fonction concave, fonction convexe
- Point d'inflexion
- Équation d'une tangente
- Primitives
- Intégrales
- Valeur moyenne
- Calcul d'une aire
- Corollaire des valeurs intermédiaires (TVI)

EXERCICE 1

[Liban 2019]

1. **L'affirmation 1 est: Vraie.**

En effet, l'équation réduite de la tangente à Cf au point A d'abscisse $x_A = 1$ s'écrit: $\boldsymbol{y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)}$

$$= f'(1)(x - 1) + f(1).$$

Or ici:
- $f(x) = 3\ln(x) - 2x + 1$,
- $Df =]0; +\infty[$,
- $A(1; f(1))$ **cad**: $A(1; -1)$,
- $f'(x) = \dfrac{3}{x} - 2$, pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Dans ces conditions: $y = \left(\dfrac{3}{1} - 2\right)(x - 1) + (-1)$

cad: $\boldsymbol{y = x - 2}$.

Au total: $y = x - 2$ est l'équation réduite de la tangente à Cf au point d'abscisse 1.

2. **L'affirmation 2 est: Vraie.**

En effet, d'après le cours, $f(x) = \dfrac{1}{e^2}\ln(x)$ est une fonction de densité sur $[e; e^2]$ ssi:

- f est continue sur $[e; e^2]$,

- pour tout $x \in [\,e\,;e^2\,]$, $f(x) \geqslant 0$,

- $\displaystyle\int_e^{e^2} f(x)\,dx = 1$.

Or ici: • **f est continue sur $[\,e\,;e^2\,]$.**

• Pour tout $x \in [\,e\,;e^2\,]$:

$$x \geqslant e \iff \ln x \geqslant \ln e$$

$$\iff \ln x \geqslant 1$$

$$\iff \frac{\ln x}{e^2} \geqslant \frac{1}{e^2}$$

$$\iff \frac{1}{e^2}\ln x \geqslant 0$$

$$\iff \boldsymbol{f(x) \geqslant 0} \quad (\text{pour tout } x\,[\,e\,;e^2\,]).$$

• $\displaystyle\int_e^{e^2} f(x)\,dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{e^2}\ln(x)\,dx$

$$= \frac{1}{e^2}\left[\,x\ln(x) - x\,\right]_e^{e^2}$$

$$= \frac{1}{e^2}\left(e^2\ln(e^2) - e^2 - (e\ln(e) - e)\right)$$

$$= \frac{1}{e^2}\left(2e^2 - e^2 - (e - e)\right).$$

D'où: $\displaystyle\boldsymbol{\int_e^{e^2} f(x)\,dx = 1}.$

Au total: f est une fonction de densité sur $[\,e\,;e^2\,]$.

3. L'affirmation 3 est: Fausse.

En effet, sur $\mathbb{R}$, G est une primitive de g ssi: $G'(x) = g(x)$.

Ici: $G(x) = -6\,e^{-2x+1} + 6$ $(-6\,e^{u} + 6)$.

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$: $G'(x) = -6 \times (-2) \times e^{-2x+1} + 0$ $(-6 \times u' \times e^{u} + 0)$

$= 12 \times e^{-2x+1} \neq g(x)$ $(g(x) = 3\,e^{-2x+1})$.

Au total: G n'est pas la primitive de g qui s'annule en $\frac{1}{2}$.

4. L'affirmation 4 est: Vraie.

En effet, d'après le cours, h est concave sur $[-8 ; -0,75]$ ssi:

Pour tout $x \in [-8 ; -0,75]$, $h''(x) \leqslant 0$.

Or ici:
- $h(x) = \dfrac{4x+1}{x^2}$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)$
- $Dh = [-8 ; -0,5]$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in [-8 ; -0,75]$:

- $h'(x) = \dfrac{(4) \times (x^2) - (4x+1) \times (2x)}{(x^2)^2}$ $\left(\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}\right)$

$= \dfrac{4x^2 - 8x^2 - 2x}{x^4}$

$= \dfrac{-4x-2}{x^3}$. $\left(\dfrac{u}{v}\right)$

- $h''(x) = \dfrac{(-4) \times (x^3) - (-4x-2) \times (3x^2)}{(x^3)^2}$ $\left(\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}\right)$

$$= \frac{-4x^3 + 12x^3 + 6x^2}{x^6}$$

$$= \frac{8x + 6}{x^4}.$$

D'où: $h''(x) \leqslant 0 \iff 8x + 6 \leqslant 0$ (car: $x^4 > 0$ sur $[-8 ; -0,5]$)

$\iff x \leqslant -0,75$ cad ssi: $-8 \leqslant x \leqslant -0,75$.

Au total: h est concave sur $[-8 ; -0,75]$.