Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE n°4 (5 points)

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;25]$ par

$$f(x) = \frac{x+2-\ln(x)}{x}\ .$$

   a. On admet que f est dérivable sur $[1\,;25]$.

   Démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;25]$,

$$f'(x) = \frac{-3+\ln(x)}{x^2}.$$

   b. Résoudre dans $[1\,;25]$ l'inéquation $-3+\ln(x) > 0$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $[1\,;25]$.

   d. Démontrer que dans l'intervalle $[1\,;25]$, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une seule solution. On notera α cette solution.

   e. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α à l'aide de la calculatrice.

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2500 pièces électroniques pour des vidéoprojecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.

   On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leq x \leq 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros.

   En utilisant les résultats obtenus à la question **1.** :

   a. Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal.

   Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

   b. Déterminer le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euros.

   c. Est-il possible que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.

EXERCICE 4

[Liban 2018]

1. a. **Démontrons que pour tout x de $[\,1\,;\,25\,]$, $f'(x) = \dfrac{-3 + \ln(x)}{x^2}$:**

Ici: • $f(x) = \dfrac{x + 2 - \ln(x)}{x}$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)$

• $Df = [\,1\,;\,25\,]$.

Posons: $f = \dfrac{f_1 - f_2}{f_3}$, avec: $f_1(x) = x + 2$, $f_2(x) = \ln(x)$ et $f_3(x) = x$.

f est dérivable sur $[\,1\,;\,25\,]$ car f_1, f_2 et f_3 sont dérivables sur $[\,1\,;\,25\,]$.

(Et: pour tout $x \in [\,1\,;\,25\,]$, $f_3(x) \neq 0$)

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,1\,;\,25\,]$.

Pour tout $x \in [\,1\,;\,25\,]$:

$$f'(x) = \frac{\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \times (x) - (x + 2 - \ln(x)) \times (1)}{x^2} \qquad \left(\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}\right)$$

$$= \frac{(x - 1) - (x + 2 - \ln(x))}{x^2}$$

$$= \frac{-3 + \ln(x)}{x^2}.$$

Au total, pour tout $x \in [\,1\,;\,25\,]$, nous avons bien: $f'(x) = \dfrac{-3 + \ln(x)}{x^2}$.

1. b. Résolvons dans [1; 25], l'inéquation $-3 + \ln(x) > 0$:

Pour tout $x \in [\, 1; 25\,]$: $-3 + \ln(x) > 0 \iff \ln(x) > 3$

$\iff e(\ln(x)) > e^3$

$\iff x > e^3.$

Au total, l'inéquation admet comme solution: $x \in \,]\, e^3; 25\,].$

1. c. Dressons le tableau des variations de f sur [1; 25]:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\, 1; 25\,]$:

• **1er cas**: $f'(x) = 0.$

$f'(x) = 0$ ssi $-3 + \ln(x) = 0$, cad: $x = e^3$ (**question précédente**).

• **2ème cas**: $f'(x) < 0.$

$f'(x) < 0$ ssi $-3 + \ln(x) < 0$, cad: $x \in [\, 1; e^3\,[.$

• **3ème cas**: $f'(x) > 0.$

$f'(x) > 0$ ssi $-3 + \ln(x) > 0$, cad: $x \in \,]\, e^3; 25\,].$

Au total: • f est décroissante sur $[\, 1; e^3]$,

(car sur $[\, 1; e^3]$, $f'(x) \leqslant 0$)

• f est croissante sur $[\, e^3; 25\,]$.

(car sur $[\, e^3; 25\,]$, $f'(x) \geqslant 0$)

Nous pouvons alors dresser le tableau des variations suivant:

x	1		e^3		25
f'		$-$	0	$+$	
f	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

Avec: • $a = f(1) \Rightarrow a = 3$,

• $b = f(e^3) \Rightarrow b = 1 - \dfrac{1}{e^3}$,

• $c = f(25) \Rightarrow c = \dfrac{27 - \ln(25)}{25}$.

1. d. Montrons que sur $[1; 25]$, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une seule solution:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

• Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

• Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • f est continue sur $[\,1\,;\,25\,]$, donc sur $[\,1\,;\,e^3\,[$, car: $1{,}5 \in [\,f(e^3)\,;\,f(1)\,[$.

• " $k = 1{,}5$ " est compris entre: $f(e^3) = 1 - \dfrac{1}{e^3}$

et: $f(1) = 3$.

• f est strictement décroissante sur $[\,1\,;\,e^3\,[$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 1{,}5$ ($k = 1{,}5$) admet une unique solution α appartenant à $[\,1\,;\,e^3\,[$, et plus généralement à $[\,1\,;\,25\,]$.

Au total: $f(x) = 1{,}5$ admet exactement une solution unique α sur $[\,1\,;\,25\,]$.

1. e. Déterminons un encadrement d'amplitude 0, 01 de α:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons comme valeur approchée de α:

$$\alpha \in \,]\,2{,}31\,;\,2{,}32\,[\text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Au total: $\alpha \in \,]\,2{,}31\,;\,2{,}32\,[$ à 10^{-2} près.

2. a. a1. Déterminons le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal:

D'après l'énoncé: • la fonction f représente le coût moyen de fabrication d'une pièce électronique (en euros),

• x correspond au nombre de pièces électroniques (en centaines).

Le coût moyen de fabrication (CM) est minimal quand la fonction f est minimale.

Or, la fonction f est minimale quand: $x = e^3$, d'après le tableau des variations.

Ainsi, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal est d'environ: $x \approx 20,09$ **cad**: $x \approx 2\,009$ pièces.

2. a. a2. Déterminons le coût moyen minimal, au centime d'euro près:

Cela revient à déterminer: $f(e^3)$.

Or: $f(e^3) = b = 1 - \frac{1}{e^3}$, **d'après le tableau des variations**.

Ainsi, le coût moyen minimal pour fabriquer 2 009 pièces est d'environ:

$$CM_{min} \approx 0,95 \text{ euro/pièce.}$$

2. b. Déterminons le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euro:

Il s'agit de déterminer x tel que: $f(x) \leqslant 1,5$.

En ayant recours à la réponse de la question **1. e.**, nous pouvons affirmer qu'en fabriquant au minimum 232 pièces **(2,32 x 100)**, le coût moyen de fabrication d'une pièce sera inférieur ou égal à 1,50 euro.

Au total: en fabriquant au minimum 232 pièces électroniques, le coût moyen de fabrication d'une pièce sera inférieur ou égal à 1,50 euro.

2. c. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ?

La réponse de la question **2. a. a2.** nous indique que le coût moyen minimal est de:

$$\mathbf{0,95 \text{ euro}} \left(1 - \frac{1}{e^3}\right).$$

Comme $0,95 > 0,5$: **non**, il n'est pas possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes.