Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

SUJET

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE n°2 (5 points)

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1er juin 2018.

À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du $n^{\text{ième}}$ mois. On a $u_0 = 20$.

1.

a. Montrer que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du 1er mois est de 35 €.

b. Calculer u_2.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 20$.
On considère l'algorithme suivant :

```
U ← 20
N ← 0
Tant que U < 70
        U ← 0,75 × U + 20
        N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme. On ajoutera autant de colonnes que nécessaire à la place de celle laissée en pointillés. Arrondir les résultats au centième.

Valeur de U	20			
Valeur de N	0			
Condition U < 70	vrai		vrai	faux

b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 80$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

b. Préciser son premier terme v_0.

c. En déduire que, pour tout entier n, $u_n = 80 - 60 \times 0{,}75^n$.

d. Déterminer, au centime près, le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er juin 2019.

e. Déterminer la limite de la suite (v_n).

f. En déduire la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2

[Liban 2018]

1. a. Montrons que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du 1er mois est de 35 €:

Il s'agit de calculer U_1.

$$U_1 = \left(U_0 - \frac{1}{4}U_0\right) + 20 \iff U_1 = (20 - 5) + 20$$

$$\Rightarrow U_1 = 35 \text{ euros.}$$

Ainsi, il y aura bien **35 euros** dans la tirelire de Maya à la fin du 1er mois.

1. b. Calculons U_2:

Il s'agit de calculer U_2.

De même: $$U_2 = \left(U_1 - \frac{1}{4}U_1\right) + 20 \iff U_2 = \left(35 - \frac{1}{4} \times 35\right) + 20$$

$$\Rightarrow U_2 = 46,25 \text{ euros.}$$

Ainsi, il y aura **46, 25 euros** dans la tirelire de Maya à la fin du second mois.

2. a. Recopions et complétons le tableau:

Le tableau recopié et complété est le suivant:

Valeur de U	20	35	46, 25	54, 69	61, 02	65, 76	69, 32	71, 99
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7
Condition $U < 70$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

2. b. Déterminons et interprétons la valeur affichée à la fin de l'exécution de l'algorithme:

Nous nous arrêtons quand **N = 7** car c'est à partir de ce mois là que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya dépassera 70 euros.

Ainsi, à la fin du 7ème mois: la somme d'argent de Maya dans la tirelire sera supérieure à 70 euros.

3. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme V_0 que nous déterminerons:

$V_n = U_n - 80 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 80$

$\iff V_{n+1} = (0,75\, U_n + 20) - 80 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 80 \Rightarrow V_0 = 20 - 80 = -60$ et $U_n = V_n + 80$.

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,75\,[V_n + 80] + 20) - 80$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,75\, V_n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $V_0 = -60$ euros.

3. b. Précisons V_0:

Comme dit précédemment: $V_0 = -60$ euros.

3. c. Déduisons-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 80 - 60 \times 0,75^n$:

Nous savons que: $*$ $V_n = -60 \times (0,75)^n$ (d'après le cours)

$*$ $U_n = V_n + 80$.

D'où: $U_n = -60 \times (0,75)^n + 80$ ou: $U_n = 80 - 60 \times (0,75)^n$.

3. d. Déterminons le moment que Maya possédera dans sa tirelire au 1er juin 2019:

Au 1er juin 2019: $n = 12$, car entre le 1er juin 2018 et le 1er juin 2019, il y a 12 mois.

Donc pour répondre à cette question, nous devons calculer: U_{12}.

$U_{12} = 80 - 60 \times (0,75)^{12}$, car: $U_n = 80 - 60 \times (0,75)^n$.

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons: $U_{12} \approx 78,1$ euros.

Ainsi, le montant que Maya possédera dans sa tirelire au 1er juin 2019 sera d'environ: 78, 1 euros.

3. e. Déterminons la limite de la suite (V_n):

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} U_n - 80$$

$$= \lim_{n \to +\infty} -60 \times (0,75)^n$$

$$= 0 \text{ euros} \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} (0,75)^n = 0, \text{ car: } 0,75 \in]0;1[.$$

Au total: $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$ **euros**.

3. f. Déduisons-en la limite de la suite (U_n) et interprétons le résultat obtenu:

Comme $U_n = V_n + 80$, $\lim_{n \to +\infty} U_n = \left(\lim_{n \to +\infty} V_n \right) + 80$

$$= 80 \text{ euros}.$$

En conclusion: au bout de n mois (" n " très grand), la tirelire de Maya contiendra **80 euros**.