Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES
AU BACCALAURÉAT ES

MATRICES ET SUITES, BAC ES

- Graphe probabiliste
- Ordre d'un graphe
- Graphe connexe
- Graphe complet
- Sommets
- Arêtes
- Matrice de transition
- Matrice d'adjacence
- Chaîne eulérienne
- Cycle eulérien
- Théorème d'Euler
- État stable
- Algorithme de Dijkstra

EXERCICE 3

[Inde, Pondichéry 2019]

1. a. Le graphe est-il complet ?

D'après le cours, nous savons que:

- Deux sommets sont dits adjacents s'ils sont reliés par une arête.
- Un graphe dont les sommets sont 2 à 2 adjacents est aussi appelé graphe complet.

Ici, le graphe n'est pas complet car, par exemple, les sommets M et P ne sont pas adjacents: ils ne sont pas reliés entre eux par une arête.

Au total: le graphe n'est pas complet.

1. b. Le graphe est-il connexe ?

Ici, le graphe est connexe car il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

En effet, deux sommets quelconques de ce graphe peuvent, par exemple, être reliés par une chaîne extraite de la chaîne: M - E - F - P - V - R.

Au total: le graphe est donc connexe.

2. Montrons qu'il est possible pour le restaurateur d'organiser une visite de tous ses producteurs en partant de son restaurant et en empruntant une fois et une seule chaque route:

Cela revient à déterminer si le graphe admet une **chaîne eulérienne**.

D'après le cours:

Le graphe étant connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- Zéro ou deux sommets (et deux seulement) X et Y du graphe sont de degré impair.
- Le graphe admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y.

Or ici: **le graphe (d'ordre 6) est connexe car il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe**.

Et, nous avons le tableau des sommets degrés suivant:

Sommets	E	F	M	P	R	V
Degrés	4	4	2	4	3	3

(degré d'un sommet = nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité)

Comme il y a 2 sommets et deux seulement R et V qui sont de degré impair, d'après le **théorème d'Euler**, le graphe admet une chaîne eulérienne.

Notons que le restaurateur doit obligatoirement commencer ses visites par un des deux sommets impairs et finir par l'autre. Ici, il commencera par R et finira par V: **R - E - M - F - E - P - R - V - P - F - V**.

Donc: **oui**, il est possible pour le restaurateur d'organiser une visite de tous ses producteurs en partant de son restaurant et en empruntant une fois et une seule chaque route.

3. a. Déterminons la matrice d'adjacence N:

Voici la matrice d'adjacence N associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique:

$$N = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} E & F & M & P & R & V \end{array} \\ \begin{array}{c} E \\ F \\ M \\ P \\ R \\ V \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

3. b. Déterminons le nombre de chemins de longueur 3 reliant l'éleveur au vigneron:

Pour répondre à cette question, il suffit dans N^3 de déterminer le nombre qui se trouve à l'intersection entre la ligne **E** et la colonne **V**.

En effet, ce nombre qui est égal à **5** ici correspond au nombre de chemins de longueur 3 reliant l'éleveur **(E)** au vigneron **(V)**.

Ainsi: 5 chemins de longueur 3 relient l'éleveur au vigneron.

4. Déterminons le plus court chemin pour effectuer ce trajet:

Notons que: le restaurateur se trouve en **R** (**chez lui**) et désire se rendre le plus rapidement possible (minimisation de la distance) en **M** (**chez le maraîcher**).

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet que le restaurateur doit suivre pour aller de R à M, tout en minimisant la distance parcourue: le trajet **R - P - V - F - M**.

Et ce trajet aura pour longueur: 4 km + 5 km + 1 km + 2 km = 12 kilomètres.

En effet, l'**algorithme de Dijkstra** est le suivant:

From ... to	E	P	V	F	M
R	5 R	4 R	10 R	∞	∞
P (4)	5 R		9 P	11 P	∞
E (5)			9 P	11 P	13 E
V (9)				10 V	13 E
F (10)					12 F

Au total, le trajet que le restaurateur doit suivre pour aller de chez lui au maraîcher, tout en minimisant la distance parcourue est:

R - P - V - F - M, et ce trajet aura pour longueur 12 **kilomètres**.