Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU VENDREDI 4 MAI 2018

SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 9 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 4 (5 points)

Dans cet exercice, si nécessaire, les valeurs numériques approchées seront données à $0,01$ près.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par :

$$f(x) = (3,6\,x + 2,4)\,\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4$$

Partie A

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;4]$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;4]$ on a :

$$f'(x) = (-2,16\,x + 2,16)\,\mathrm{e}^{-0,6x}$$

2. **a)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;4]$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.
On donnera les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variation sous forme approchée.

3. On admet que la fonction F définie par :

$$F(x) = (-6x - 14)\,\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;4]$.
Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ puis en donner une valeur numérique approchée.

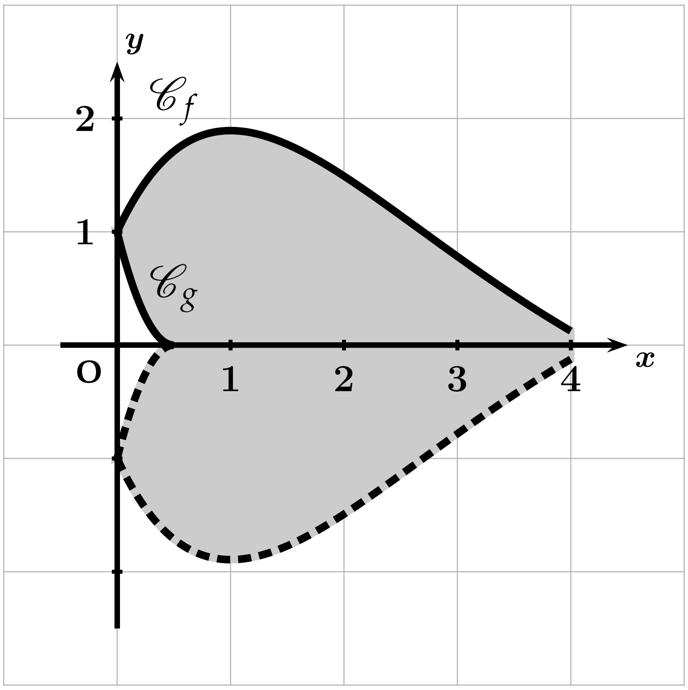
Partie B

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;4]$.
On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle $[0\,;0,5]$.

On a tracé ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère d'origine O et, en pointillés, les courbes obtenues par symétrie de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ par rapport à l'axe des abscisses :



1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$.

2. On considère le domaine plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, leurs courbes symétriques (en pointillés) ainsi que la droite d'équation $x = 4$.

Ce domaine apparaît grisé sur la figure ci-dessus.

Calculer une valeur approchée de l'aire, en unités d'aire, de ce domaine.

EXERCICE 4

[Inde, Pondichéry 2018]

Partie A:

1. Montrons que, pour tout $x \in [0; 4]$, $f'(x) = (-2,16x + 2,16)\,e^{-0,6x}$:

Ici: • $f(x) = (3,6x + 2,4)\,e^{-0,6x} - 1,4$ (u x v) - 1, 4

• $Df = [0; 4]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2 + f_3$, avec: $f_1(x) = 3,6x + 2,4$, $f_2(x) = e^{-0,6x}$

et $f_3(x) = -1,4$.

f est dérivable sur $[0; 4]$ car f_1, f_2 et f_3 sont dérivables sur $[0; 4]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; 4]$.

Pour tout $x \in [0; 4]$:

$f'(x) = (3,6) \times (e^{-0,6x}) + (3,6x + 2,4) \times (-0,6e^{-0,6x})$ (u' x v + u x v')

$= 3,6e^{-0,6x} - 2,16x\,e^{-0,6x} - 1,44e^{-0,6x}$

$= (-2,16x + 2,16)\,e^{-0,6x}$.

Au total, pour tout $x \in [0; 4]$, nous avons bien: $f'(x) = (-2,16x + 2,16)\,e^{-0,6x}$.

2. a. Etudions le signe de $f'(x)$ sur $[0; 4]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [0; 4]$:

- **1^{er} cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-2,16x + 2,16 = 0$, cad: $x = 1$.

(pour tout $x \in IR$, $e^{-0,6x} > 0$)

- **$2^{ème}$ cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-2,16x + 2,16 < 0$, cad: $x \in]\,1; 4\,]$.

(pour tout $x \in IR$, $e^{-0,6x} > 0$)

- **$3^{ème}$ cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-2,16x + 2,16 > 0$, cad: $x \in [\,0; 1\,[$.

(pour tout $x \in IR$, $e^{-0,6x} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[\,0; 1\,]$,

(car sur $[\,0; 1\,]$, $f'(x) \geqslant 0$)

• f est décroissante sur $[\,1; 4\,]$.

(car sur $[\,1; 4\,]$, $f'(x) \leqslant 0$)

2. b. Dressons le tableau de variations de f sur $[\,0; 4\,]$:

Sur $[\,0; 4\,]$, le tableau de variations de f est le suivant:

	0		1		4
		+	0	-	
	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 1$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 6e^{-0,6} - 1,4 \approx 1,89$,

• $c = f(4) \Rightarrow c = 16,8e^{-2,4} - 1,4 \approx 0,12$.

3. a. Calculons la valeur exacte de $\int_0^4 f(x)\,dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_0^4 f(x)\,dx$.

f est continue sur $[0; 4]$, elle admet donc des primitives sur $[0; 4]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_0^4 f(x)\,dx$$

$$= [F(x)]_0^4$$

$$= [(-6x - 14)e^{-0,6x} - 1,4x]_0^4$$

$$= 8,4 - 38e^{-2,4}.$$

Au total, une valeur exacte de I est: $I = 8,4 - 38e^{-2,4}$.

3. b. Déterminons une valeur approchée de I:

Une valeur approchée de I est: $I \approx 4,95$.

Partie B:

1. Montrons que $\int_0^{0,5} g(x)\,dx = \frac{1}{6}$:

Ici, il s'agit de calculer: $J = \int_0^{0,5} g(x)\,dx$.

g est continue sur $[\,0\,;0,5\,]$, elle admet donc des primitives sur $[\,0\,;0,5\,]$ et par conséquent: J existe.

$$J = \int_0^{0,5} g(x)\,dx$$

$$= \int_0^{0,5} (4x^2 - 4x + 1)\,dx$$

$$= \left[\,\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x\,\right]_0^{0,5}$$

$$= \frac{4}{3}(0,5)^3 - 2\,(0,5)^2 + 0,5$$

$$= \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{8}\right) - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{6}.$$

Au total, nous avons bien: $\boldsymbol{J = \frac{1}{6}}$.

2. Calculons une valeur approchée de l'aire, en unités d'aire, de ce domaine:

L'aire demandée $\mathcal{A}$ est égale à deux fois l'aire du domaine colorié située au dessus de l'axe des abscisses.

Ainsi: $\mathcal{A} = 2 \times \left(\int_0^{4} f(x)\,dx - \int_0^{0,5} g(x)\,dx \right)$

$= 2 \times (\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}\,).$

D'où: $\mathcal{A} \approx 2 \times \left(4,95 - \frac{1}{6}\right)$

$\approx 9,57.$

Au total, une valeur approchée de l'aire du domaine colorié est:

$\mathcal{A} \approx 9,57$ unités d'aire.