

Corrigé

Exercice 2



freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT ES

SUITES NUMÉRIQUES, BAC ES

- Suite arithmétique
- Suite géométrique
- Calcul de U_0 , U_1 et U_2
- Raison et premier terme d'une suite
- Suite croissante, décroissante
- Majorant, minorant
- Expression de U_n en fonction de n
- Suite convergente
- Théorème des gendarmes
- Limites
- Algorithmes

EXERCICE 2

[France Métropolitaine 2019]

1. a. Justifions que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,96 U_n + 22$:

- D'après l'énoncé, en 2018 il y a 300 pommiers par hectare.

D'où: $U_0 = 300$ pommiers.

- De plus, chaque année, Laurence:

- élimine 4% des pommiers existants,
- et, replante 22 nouveaux pommiers par hectare.

Soient: • U_{n+1} , le nombre de pommiers par hectare l'année 2018 + (n+1),
• U_n , le nombre de pommiers par hectare l'année 2018 + n.

Pour tout entier naturel n , le nombre total de pommiers par hectare l'année 2018 + (n+1) est égal à celui U_n diminué de 4% et augmenté d'une quantité de 22 nouveaux pommiers.

Pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n - 4\% \times U_n + 22 \quad \text{cad: } U_{n+1} = 0,96 \times U_n + 22.$$

Au total, nous avons bien: $U_{n+1} = 0,96 \times U_n + 22$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. b. Estimons le nombre de pommiers par hectare en 2020:

L'année 2020 correspond à: $n = 2$.

Il s'agit de calculer ici: U_2 .

$$\bullet U_1 = U_0 - 4\% \times U_0 + 22 \iff U_1 = 300 - 4\% \times 300 + 22$$

cad: $U_1 = 310$ pommiers.

$$\bullet U_2 = U_1 - 4\% \times U_1 + 22 \iff U_2 = 310 - 4\% \times 310 + 22$$

cad: $U_2 = 320$ pommiers.

Ainsi, le nombre de pommiers par hectare en 2020 sera d'environ: 320.

2. a. Recopions et complétons l'algorithme pour qu'il détermine le rang de l'année cherchée:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

$N \leftarrow 0$

$U \leftarrow 300$

Tant que $U < 400$

$N \leftarrow N + 1$

$U \leftarrow 0,96 \times N + 22$

Fin Tant que

2. b. Déterminons la valeur de " N " en sortie d'algorithme:

A l'aide d'une machine à calculer, nous obtenons: $N = 13$.

Ainsi, la valeur de " N " à la fin de l'exécution de l'algorithme est: $N = 13$.

3. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison q et de premier terme V_0 que l'on précisera:

$$V_n = U_n - 550 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 550, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\iff V_{n+1} = (0,96 \times U_n + 22) - 550 \quad (1).$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 550 \implies V_0 = 300 - 550 = -250 \text{ et } U_n = V_n + 550.$$

$$\text{Alors: } (1) \iff V_{n+1} = (0,96 [V_n + 550] + 22) - 550$$

$$\implies V_{n+1} = 0,96 V_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $V_0 = -250$.

3. b. b1. Pour tout entier naturel n , exprimons V_n en fonction de n :

Comme $V_{n+1} = 0,96 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 \times (0,96)^n \text{ cad: } V_n = -250 \times (0,96)^n.$$

3. b. b2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que $U_n = -250 \times (0,96)^n + 550$:

$$\text{Nous savons que pour tout } n \in \mathbb{N}: \quad * V_n = -250 \times (0,96)^n$$

$$* U_n = V_n + 550.$$

$$\text{D'où pour tout } n \in \mathbb{N}: \quad U_n = -250 \times (0,96)^n + 550.$$

3. c. Estimons le nombre de pommiers de Laurence en 2025:

L'année 2025 correspond à: $n = 7$.

D'où, le nombre de pommiers pour 1 hectare en 2025 sera de:

$$U_7 = -250 \times (0,96)^7 + 550 \text{ soit: } U_7 \approx 362 \text{ pommiers.}$$

Or, il y a 14 hectares dans la ferme, par conséquent le nombre total de pommiers en 2025 sera de: $362 \times 14 \approx 5070$.

Au total, le nombre de pommiers de Laurence en 2025 sera d'environ:

5070.

3. d. Résolvons l'inéquation $U_n > 400$:

Nous allons déterminer "n" $\in \mathbb{N}$ tel que: $U_n > 400$.

$$U_n > 400 \Leftrightarrow -250 \times (0,96)^n + 550 > 400$$

$$\Leftrightarrow (0,96)^n < \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln(0,96) < \ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{\ln(0,96)}, \text{ car: } 0,96 \in]0; 1[$$

$$\Rightarrow n > 13 \text{ ans, car } n \text{ est un entier naturel.}$$

En conclusion: cela confirme bien le fait que 13 ans après l'année 2018, la densité de pommiers dépassera 400 pommiers par hectare.

Donc en 2031.