Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU VENDREDI 22 JUIN 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le temps passé par un client, en minute, dans un supermarché peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart type $\sigma = 12$.

Pour tout événement E, on note $p(E)$ sa probabilité.

1. Déterminer, en justifiant :
   a) $p(X = 10)$
   b) $p(X \geq 45)$
   c) $p(21 \leq X \leq 69)$
   d) $p(21 \leq X \leq 45)$

2. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'un client passe entre 30 et 60 minutes dans ce supermarché.

3. Déterminer la valeur de a, arrondie à l'unité, telle que $P(X \leq a) = 0{,}30$. Interpréter la valeur de a dans le contexte de l'énoncé.

Partie B

En 2013, une étude a montré que 89 % des clients étaient satisfaits des produits de ce supermarché.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion de clients satisfaits pour un échantillon de 300 clients pris au hasard en 2013.

Lors d'une enquête réalisée en 2018 auprès de 300 clients choisis au hasard, 286 ont déclaré être satisfaits.

2. Calculer la fréquence de clients satisfaits dans l'enquête réalisée en 2018.

3. Peut-on affirmer, au seuil de 95 %, que le taux de satisfaction des clients est resté stable entre 2013 et 2018 ? Justifier.

EXERCICE 1

[France Métropolitaine 2018]

Partie A:

1. Déterminons les différentes probabilités:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart type $\sigma = 12$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

1. a. $P(X = 10)$?

D'après le cours, quand nous sommes en présence d'une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité à densité: $\mathbf{P(X = x) = 0}$, toujours.

Or ici: X suit la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart type $\sigma = 12$, la loi normale étant une loi de probabilité à densité.

Par conséquent, nous pouvons affirmer que: $P(X = 10) = 0$.

1. b. $P(X \geqslant 45)$?

$$P(X \geqslant 45) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geqslant \frac{45 - 45}{12}\right)$$

$$= P(T \geqslant 0)$$

$$= 1 - P(T \leqslant 0)$$

$= 1 - 0,5$, car: $P(T \leqslant 0) = 0,5$.

Ainsi: $P(X \geqslant 45) = 0,5$.

1. c. $P(21 \leqslant X \leqslant 69)$?

Nous savons que: $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

Or ici, nous remarquons que: $21 = \mu - 2\sigma$ et $69 = \mu + 2\sigma$.

D'où: $P(21 \leqslant X \leqslant 69) \approx 0,954$.

1. d. $P(21 \leqslant X \leqslant 45)$?

$$P(21 \leqslant X \leqslant 45) = P\left(\frac{21 - 45}{12} \leqslant \frac{X - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{45 - 45}{12}\right)$$

$$= P(-2 \leqslant T \leqslant 0)$$

$$= P(T \leqslant 0) - P(T \leqslant -2)$$

$$= P(T \leqslant 0) - (1 - P(T \leqslant 2))\text{, propriétés du cours}$$

$$= 0,5 - 1 + P(T \leqslant 2)$$

$$= -0,5 + P(T \leqslant 2).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$P(21 \leqslant X \leqslant 45) \approx -0,5 + 0,9775$ cad: $P(21 \leqslant X \leqslant 45) \approx 0,4775$.

2. Calculons $P(30 \leqslant X \leqslant 60)$:

Il s'agit de calculer: $P(30 \leqslant X \leqslant 60)$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$P(30 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0,789$.

Au total, la probabilité qu'un client passe entre 30 et 60 minutes dans ce supermarché est d'environ: 78,9%.

3. a. Déterminons la valeur de a telle que $P(X \leqslant a) = 0,30$:

Il s'agit de déterminer " a " sachant que: $P(X \leqslant a) = 0,30$.

$$P(X \leqslant a) = 0,30 \iff P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{a-45}{12}\right) = 0,30$$

$$\iff P\left(T \leqslant \frac{a-45}{12}\right) = 0,30 \text{ ou } P\left(T \leqslant \frac{-a+45}{12}\right) = 0,70.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{-a+45}{12} \approx 0,5244 \Rightarrow a \approx 39 \text{ minutes.}$$

Au total: $a \approx 39$ minutes et $P(X \leqslant 39) = 30\%$.

3. b. Interprétons le résultat obtenu:

Cela signifie qu'il y a 30% de chance pour que le client passe moins de 39 minutes dans le supermarché.

Partie B:

1. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique demandé:

Ici, nous avons:
- $n = 300$
- $p = 89\%$
- $f = ?$

Dans ces conditions:

$n = 300 \geqslant 30$, $n \cdot p = 267 \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - p) = 33 \geqslant 5$.

Les conditions sont donc réunies.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right],$$

cad: $I = \left[89\% - 1,96 \times \sqrt{\frac{89\% \times 11\%}{300}} ; 89\% + 1,96 \times \sqrt{\frac{89\% \times 11\%}{300}} \right]$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\, 85,5\% ; 92,5\% \,]$.

Au total, l'intervalle de fluctuation asymptotique demandé est:

$$I \approx [\, 85,5\% ; 92,5\% \,].$$

2. **Calculons la fréquence de clients satisfaits en 2018:**

Nous avons: $f = \frac{286}{300}$ cad: $f \approx 95,33\%$.

3. **Le taux de satisfaction des clients est-il resté stable entre 2013 et 2018 ?**

Ici la fréquence " f ", sur l'échantillon, est telle que: $f = 95,33\% \notin I$.

Ainsi, **non** le taux de satisfaction des clients n'est pas resté stable entre 2013 et 2018.