Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

SUJET

ÉPREUVE DU LUNDI 11 JUIN 2018

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE n°3 (5 points)

Une entreprise dispose d'un stock de guirlandes électriques. On sait que 40% des guirlandes proviennent d'un fournisseur A et le reste d'un fournisseur B.
Un quart des guirlandes provenant du fournisseur A et un tiers des guirlandes provenant du fournisseur B peuvent être utilisées uniquement en intérieur pour des raisons de sécurité. Les autres guirlandes peuvent être utilisées aussi bien en intérieur qu'en extérieur.

1. On choisit au hasard une guirlande dans le stock.

- On note A l'événement « la guirlande provient du fournisseur A » et B l'événement « la guirlande provient du fournisseur B ».
- On note I l'événement « la guirlande peut être utilisée uniquement en intérieur ».

a. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

b. Montrer que la probabilité $P(I)$ de l'évènement I est 0,3.

c. On choisit une guirlande pouvant être utilisée aussi bien en intérieur qu'en extérieur. Le responsable de l'entreprise estime qu'il y a autant de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B.

Le responsable a-t-il raison ? Justifier.

2. Une guirlande pouvant être utilisée aussi bien en intérieur qu'en extérieur est vendue 5€ et une guirlande pouvant être utilisée uniquement en intérieur est vendue 3€.
Calculer le prix moyen d'une guirlande prélevée au hasard dans le stock.

3. Lors d'un contrôle qualité, on prélève au hasard 50 guirlandes dans le stock. Le stock est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. On admet que la proportion de guirlandes défectueuses est égale à 0,02.
Calculer la probabilité qu'au moins une guirlande soit défectueuse. Arrondir le résultat à 10^{-3}.

4. L'entreprise souhaite connaître l'opinion de ses clients quant à la qualité de ses guirlandes électriques. Pour cela elle souhaite obtenir, à partir d'un échantillon aléatoire, une estimation de la proportion de clients satisfaits au niveau de confiance de 95% à l'aide d'un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à 8%.

Combien l'entreprise doit-elle interroger de clients au minimum ?

EXERCICE 3

[Centres Étrangers 2018]

1. a. Construisons un arbre pondéré décrivant la situation:

D'après l'énoncé, nous avons:

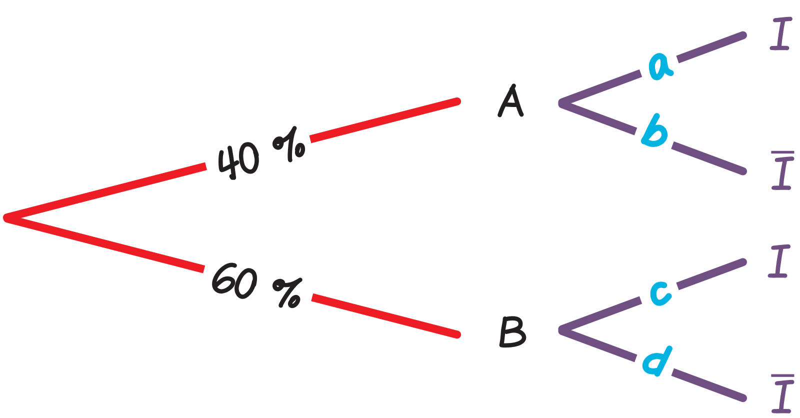
- A = " la guirlande provient du fournisseur A ".
- B = " la guirlande provient du fournisseur B ".
- I = " la guirlande peut être utilisée uniquement en intérieur ".
- $\overline{I}$ = " la guirlande peut être utilisée en intérieur et en extérieur ".

- $P(A) = 40\%$
- $P(B) = 1 - 40\% = 60\%$.

- $P_A(I) = \frac{1}{4}$
- $P_A(\overline{I}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

- $P_B(I) = \frac{1}{3}$
- $P_B(\overline{I}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Nous avons ainsi l'arbre de probabilité suivant:



, avec:

- $a = \frac{1}{4}$
- $b = \frac{3}{4}$
- $c = \frac{1}{3}$
- $d = \frac{2}{3}$

.

1. b. Montrons que $P(I) = 0,3$:

Nous devons calculer: $P(I)$.

Or, l'événement $I = (I \cap A) \cup (I \cap B)$.

D'où: $P(I) = P(I \cap A) + P(I \cap B)$

$$= P_A(I) \times P(A) + P_B(I) \times P(B).$$

Ainsi: $P(I) = \frac{1}{4} \times 40\% + \frac{1}{3} \times 60\%$ => $P(I) = 30\%$.

Au total, nous avons bien: $P(I) = 0,3$.

1. c. Le responsable a-t-il raison ?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer $P_{\bar{I}}(A)$ et comparer la réponse obtenue à $\frac{1}{2}$ car: " autant de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B " $= 50\% = \frac{1}{2}$.

$$P_{\bar{I}}(A) = \frac{P(\bar{I} \cap A)}{P(\bar{I})}$$

$$= \frac{P_A(\bar{I}) - P(A)}{P(\bar{I})}.$$

Ainsi: $$P_{\overline{I}}(A) = \frac{\frac{3}{4} \times 40\%}{1 - P(I)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \times 40\%}{0,7} \Rightarrow P_{\overline{I}}(A) = \frac{3}{7}.$$

Au total: comme $\frac{3}{7} \neq \frac{1}{2}$, le responsable a tort.

2. Calculons le prix moyen d'une guirlande prélevée au hasard dans le stock:

- La probabilité d'être en présence d'une guirlande uniquement d'intérieur est:

$$P(I) = 30\%.$$

- La probabilité d'être en présence d'une guirlande d'intérieur et d'extérieur est:

$$P(\overline{I}) = 70\%.$$

- Le prix d'une guirlande uniquement d'intérieur est de: **3 €**.
- Le prix d'une guirlande d'intérieur et d'extérieur est de: **5 €**.

Dans ces conditions, le prix moyen d'une guirlande est de:

$$\text{Prix}_{\text{Moyen}} = 3 \times 30\% + 5 \times 70\% \Rightarrow \text{Prix}_{\text{Moyen}} = 4,40\ €.$$

Au total, le prix moyen d'une guirlande prélevée au hasard dans les stocks est de: 4, 40 euros.

3. Calculons la probabilité qu'au moins une guirlande soit défectueuse:

Soit l'expérience aléatoire consistant à prélever au hasard 50 guirlandes dans le stock: le stock est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

Soient les événements $D =$ " la guirlande est défectueuse ", et $\overline{D} =$ " la guirlande n'est pas défectueuse ".

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de guirlandes défectueuses parmi les 50 guirlandes tirées au hasard.

Nous sommes en présence de 50 épreuves aléatoires identiques et indépendantes.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de D suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 50$ et $p = 2\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\,(50\,;\,2\%)$.

En fait, on répète 50 fois un schéma de Bernoulli.

Il s'agit de calculer ici: $P\,(X \geqslant 1)$ avec: $X \rightsquigarrow B\,(50\,;\,2\%)$.

Or: $P\,(X \geqslant 1) = 1 - P\,(X < 1)$

$$= 1 - P\,(X = 0)$$

$$= 1 - \binom{50}{0}\,(2\%)^0\,(1 - 2\%)^{50}$$

$$= 1 - (98\%)^{50}$$

=> $P\,(X \geqslant 1) \approx 63,58\%$ ou: $P\,(X \geqslant 1) \approx 63,6\%$, en arrondissant à 10^{-3}.

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, la probabilité qu'au moins une guirlande soit défectueuse est d'environ: 63,6%.

4. Déterminons le nombre minimum de clients que l'entreprise doit interroger:

D'après le cours, la longueur ou amplitude d'intervalle de confiance à 95% est donnée par la formule: $L = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Or ici: **$L \leqslant 8\%$**.

Donc, il s'agit de déterminer " n " tel que: $L \leqslant 8\%$.

$L \leqslant 8\% \iff \dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 8\% \Rightarrow n \geqslant 625$ clients (car $n \in \mathbb{N}$).

Au total: l'entreprise doit interroger au minimum **625 clients**.