Corrigé

Exercice 2

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT ES

MATRICES ET SUITES, BAC ES

- Graphe probabiliste
- Ordre d'un graphe
- Graphe connexe
- Graphe complet
- Sommets
- Arêtes
- Matrice de transition
- Matrice d'adjacence
- Chaîne eulérienne
- Cycle eulérien
- Théorème d'Euler
- État stable
- Algorithme de Dijkstra

EXERCICE 2

[Antilles-Guyane 2019]

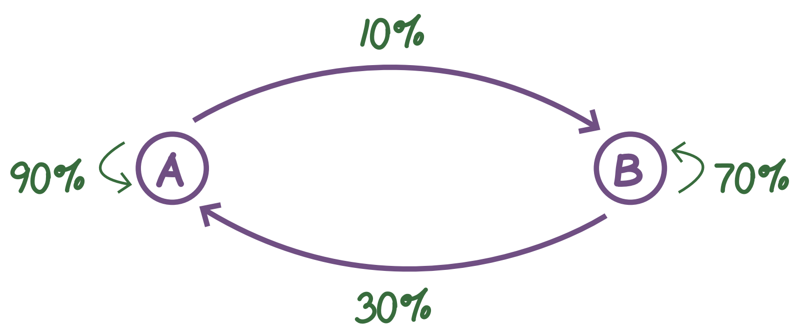
Partie A:

1. Représentons cette situation par un graphe probabiliste:

Soient: • A, l'état: " posséder une carte jeune ",

• B, l'état: " ne pas posséder une carte jeune ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. Donnons la matrice de transition M de ce graphe:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 90\% & 10\% \\ 30\% & 70\% \end{pmatrix}.$$

3. a. Vérifions que $a_2 = 0,552$ et $b_2 = 0,448$:

Pour cela, nous devons calculer: $P_2 = (a_2 \quad b_2)$.

D'après le cours: $P_2 = P_0 \times M^{(2-0)}$ **cad** $P_2 = P_0 \times M^2$.

Or: $\mathbf{P_0 = (20\% \quad 80\%)}$ **(en 2018, 80% ne possédaient pas la carte).**

Et: $M^2 = \begin{pmatrix} 90\% & 10\% \\ 30\% & 70\% \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 90\% & 10\% \\ 30\% & 70\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{84\%} & \mathbf{16\%} \\ \mathbf{48\%} & \mathbf{52\%} \end{pmatrix}$.

D'où: $P_2 = (20\% \quad 80\%) \begin{pmatrix} 84\% & 16\% \\ 48\% & 52\% \end{pmatrix}$

$= (55,2\% \quad 44,8\%)$.

Ainsi: $\mathbf{a_2 = 55,2\%}$ **et** $\mathbf{b_2 = 44,8\%}$.

Au total, nous avons bien: $a_2 = 55,2\% = \mathbf{0,552}$ et $b_2 = 44,8\% = \mathbf{0,448}$.

3. b. Interprétons le coefficient 0,552 dans le contexte de l'énoncé:

" 0,552 " signifie qu'en 2020 (2018 + 2), 55,2% de la population des 12-18 ans de la ville posséderont (estimation) la carte jeune.

4. a. Déterminons le système vérifié par les coefficients a et b:

Pour cela, nous allons déterminer l'état stable du système.

A long terme, l'état P_n à l'étape n converge vers P un état stable indépendant de l'état initial.

Nous allons donc déterminer $P = (a \quad b)$.

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation: $P = P \times M$.

Soit $P = (a \quad b)$, $P = P \times M \iff (a \quad b) = (a \quad b)\begin{pmatrix} 90\% & 10\% \\ 30\% & 70\% \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} a = 0,9a + 0,3b \\ b = 0,1a + 0,7b \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -0,1a + 0,3b = 0 \\ 0,1a - 0,3b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}.$$

Au total, les nombres a et b sont bien solutions du système: $\begin{cases} -0,1a + 0,3b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$.

4. b. Justifions que la mairie peut espérer qu'à l'avenir au moins 70% de la population des 12-18 ans possèdent la carte:

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer la valeur de " **a** " en résolvant le système: $\begin{cases} -0,1a + 0,3b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$.

$$\begin{cases} -0,1a + 0,3b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -0,1a + 0,3(1 - a) = 0 \\ b = 1 - a \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{a = 0,75} \\ \mathbf{b = 0,25} \end{cases}.$$

De plus, nous savons que l'état stable P nous indique, au bout de n années (" n très grand "), le pourcentage de la population des 12-18 ans qui possèderont la carte jeune, ainsi que celui de la population des 12-18 ans qui ne possèderont pas la carte jeune.

Comme ici: $P = (75\% \quad 25\%)$, nous pouvons affirmer qu'à long terme, 75% de la population des 12-18 ans posséderont la carte jeune.

Donc: **oui**, le maire peut espérer qu'à l'avenir au moins 70% de la population des 12-18 ans possèdent la carte jeune car **75% > 70%**.

Partie B:

1. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```
A ← 0,2
N ← 0
Tant que A < 0,7 faire
    | A prend la valeur 0,6 x A + 0,3
    | N prend la valeur N + 1
Fin Tant que
```

2. Déterminons l'année où l'objectif sera atteint:

D'après l'énoncé, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,3$ et la suite (a_n) est croissante, pour tout entier naturel n.

A l'aide d'une machine à calculer, nous avons:
- $a_4 \approx 0,6787 < 0,7$
- $a_5 \approx 0,7072 > 0,7$.

Ainsi: l'objectif sera atteint en 2023 **(2018 + 5)**.