# Corrigé

# Exercice 3

freemaths.fr

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

## Session 2018

### MATHÉMATIQUES – Série ES

### ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

**Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5**

### MATHÉMATIQUES – Série L

### ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4**



# SUJET

### ÉPREUVE DU MARDI 19 JUIN 2018

**L'usage de la calculatrice est autorisé.**

**Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.**
**Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

**Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).**

**Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci.**

## EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

On définit deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ par, pour tout entier naturel $n$

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n + 0,4 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} v_0 = 8 \\ v_{n+1} = 1,028\, v_n \end{array}\right. .$$

1. **a.** Parmi ces deux suites, préciser laquelle est arithmétique et laquelle est géométrique ; donner leurs raisons respectives.

   **b.** Exprimer $u_n$ et $v_n$ en fonction de l'entier naturel $n$.

2. On donne l'algorithme suivant dans lequel $n$ est un entier naturel, et $U$ et $V$ sont des réels qui désignent respectivement les termes de rang $n$ des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ :

```
n ← 0
U ← 10
V ← 8
Tant que U > V
   U ← U + 0,4
   V ← V × 1,028
   n ← n + 1
Fin Tant que
```

   En sortie de cet algorithme, $n$ a pour valeur 46.
   Interpréter ce résultat.

3. En 1798, l'économiste anglais Thomas Malthus publie "An essay on the principle of population" dans lequel il émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira son pays à la famine.
   Il écrit :

   > *"Nous pouvons donc tenir pour certain que, lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle va doublant tous les vingt-cinq ans, et croît de période en période selon une progression géométrique. [...] Nous sommes donc en état de prononcer, en partant de l'état actuel de la terre habitée, que les moyens de subsistance, dans les circonstances les plus favorables de l'industrie, ne peuvent jamais augmenter plus rapidement que selon une progression arithmétique."*

   En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions d'habitants et l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes. Le modèle de Malthus admet que la population augmente de 2,8 % chaque année et que les progrès de l'agriculture permettent de nourrir 0,4 million de personnes de plus chaque année.

   On utilisera ce modèle pour répondre aux questions suivantes.

   **a.** Quelle aurait été, en million d'habitants, la population de l'Angleterre en 1810 ? On arrondira le résultat au millième.

   **b.** À partir de quelle année la population de l'Angleterre aurait-elle dépassé 16 millions d'habitants ?

   **c.** À partir de quelle année la population de l'Angleterre serait-elle devenue trop grande pour ne plus être suffisamment nourrie par son agriculture ?

# EXERCICE 3

## [ Antilles-Guyane 2018 ]

**1. a. Donnons la nature des suites $(U_n)$ et $(V_n)$:**

- La suite $(U_n)$ est arithmétique de raison $r = 0,4$ et de premier terme $U_0 = 10$.
- La suite $(V_n)$ est géométrique de raison $q = 1,028$ et de premier terme $V_0 = 8$.

**1. b. Exprimons $U_n$ et $V_n$ en fonction de l'entier naturel $n$:**

D'après le cours, quand pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = U_n + r$ et $V_{n+1} = q \cdot V_n$,

nous pouvons alors écrire: $U_n = U_0 + n \cdot r$ et $V_n = V_0 \cdot q^n$.

Donc ici, les expressions de $U_n$ et $V_n$ en fonction de l'entier naturel $n$ sont:

$$U_n = 10 + 0,4 \cdot n \text{ et } V_n = 8 \cdot (1,028)^n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Au total, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = 10 + 0,4 \cdot n$ et $V_n = 8 \cdot (1,028)^n$.

**2. Interprétons le résultat obtenu:**

En sortie de l'algorithme, " **n** " a pour valeur: $n = 46$.

Cela signifie que: c'est à partir de $n = 46$ que $V_n$ dépassera enfin $U_n$.

Donc quand $n \geqslant 46$: $V_n \geqslant U_n$, $n \in \mathbb{N}$.

**3. a. Déterminons la population de l'Angleterre en 1810:**

La population, en millions d'habitants, de l'Angleterre en 1810 était d'environ:

$V_{10} = 8 \times (1,028)^{10}$ cad: $V_{10} \approx$ **10,544 millions d'habitants**.

**3. b. Déterminons à partir de quelle année la population de l'Angleterre aurait dépassé 16 millions d'habitants:**

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer " **n** " tel que:

$V_n \geq 16$. **( 16 = 16 millions d'habitants)**

$V_n \geq 16 \iff 8 \times (1,028)^n \geq 16$

$\iff n \cdot \ln(1,028) \geq \ln(2)$

$\iff n \geq \dfrac{\ln(2)}{\ln(1,028)}$

$\Rightarrow n \geq 26$, car **n** est un entier naturel.

Ainsi, la population d'Angleterre aurait dépassé 16 millions d'habitants:

**en** 1800 + 26 cad: **en 1826**.

**3. c. Déterminons l'année à partir de laquelle l'agriculture serait devenue insuffisante:**

Le problème serait intervenu à partir du moment où: $U_n < V_n$.

Or, grâce à la question **2.**, nous savons que $V_n$ dépasse $U_n$ quand **n = 46**.

Au total, l'agriculture serait devenue insuffisante pour nourrir la population d'Angleterre **en** 1800 + 46 cad: **en 1846**.