SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

EXERCICES NATIONAUX

Classes de première S • 2011

>> Zone Europe - Afrique - Asie

>> Zone Amériques - Caraïbes

>> Zone Océanie

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE PREMIÈRE 2011

SUJETS NATIONAUX

Zone Europe-Afrique-Asie

Exercice national 1 : Essuie-glaces

(les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

- Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm^2 près.

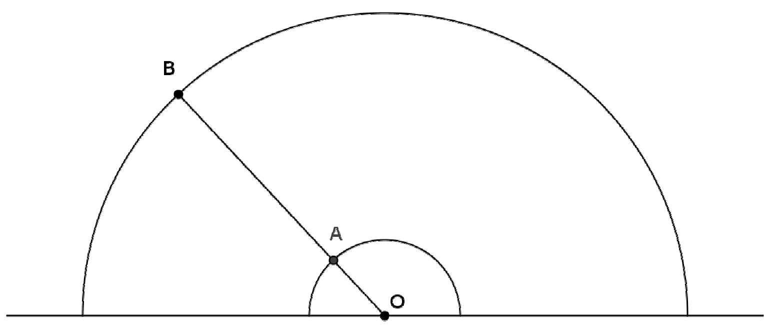


Fig. 1

- Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

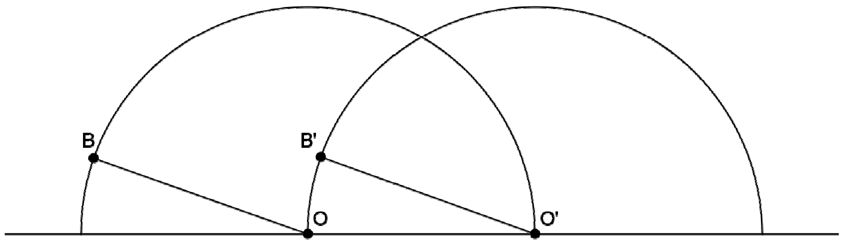


Fig. 2

- Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, CB = 4 CA et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose CA = *a*.

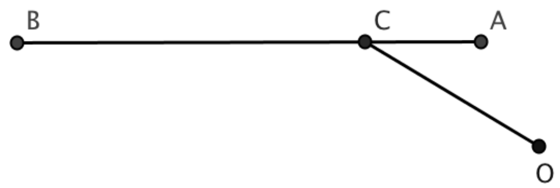


Fig. 3

a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.
b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de *a* l'aire de la surface essuyée par le balai.

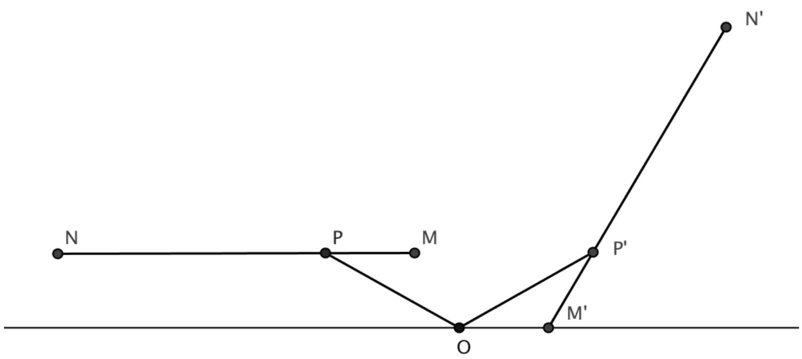
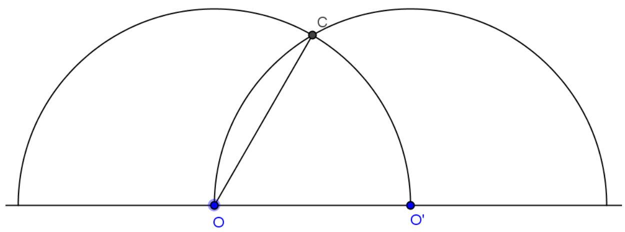


Fig. 4

Eléments de correction (proposés par l'académie de Corse)

1) L'aire demandée en cm^2 est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left(\pi.60^2 - \pi.15^2\right) = \frac{\pi}{2}15^2\left(4^2 - 1\right) = \frac{\pi}{2}.15^3 = 3375.\frac{\pi}{2}$ soit en valeur approchée 5301 cm^2 .
2) Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons L'aire du triangle équilatéral $OO'C$ de côté de longueur R, et donc de hauteur $R\frac{\sqrt{3}}{2}$: $A_1 = \frac{1}{2}\left(R\times\frac{\sqrt{3}}{2}R\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.



Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $\widehat{O'OC}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{COO'}$:

$A_2 = \frac{\pi R^2}{6}$.

Ainsi l'aire de le portion de plan limitée par la corde [OC] et l'arc $\overset{\frown}{OC}$ sera : $A_2 - A_1$.

L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera donc $A = A_2 + A_2 - A_1 = 2A_2 - A_1$

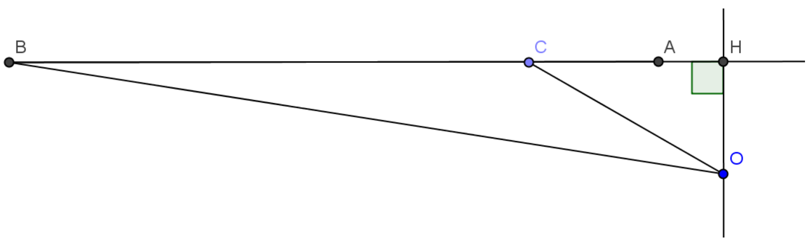
Donc $A_3 = \frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un cercle de rayon R privée de A_3 soit

$\mathcal{A} = \pi R^2 - \left(\frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$ et donc $\boxed{\mathcal{A} = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2}$

(Autre méthode : la surface cherchée vaut l'aire du triangle et les deux secteurs d'angle $\frac{2\pi}{3}$)

3)



a) $\sin\widehat{OCH} = \sin 30° = \frac{1}{2}$ donc $\frac{OH}{OC} = \frac{1}{2}$ soit $OH = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

De même $\frac{HC}{OC} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $HC = \frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{3} = \frac{3}{2}a$.

Enfin d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en H on a

$$OA^2 = HA^2 + HO^2 = \left(HC - CA\right)^2 + HO^2 = \left(\frac{3}{2}a - a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2 .$$

Ainsi $OA = OC$ et donc $\boxed{\text{le triangle } AOC \text{ est isocèle.}}$

b) L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$. En degré elle vaut $180 - \widehat{XOM}$ avec X comme sur le dessin. Or les angles $\widehat{XOP}$ et $\widehat{OPM}$ sont alternes internes, et le triangle *MOP* est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{MOX} = 2\times 30 = 60°$. Donc l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ a pour mesure 180-60= $\boxed{120°.}$

La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments [MN] et [M'N'] et les arcs $\overset{\frown}{MM'}$ et $\overset{\frown}{NN'}$. Soient T et T' les intersections du cercle de centre O passant par M et les segments [ON] et [ON']. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment [ON] ayant pour image [ON'], T a donc pour image T'. Les points M, T, N ont respectivement pour images M', T' et N', et la conservation des aires par rotation montre que la portion de plan limitée par [MN], [NT] et l'arc $\overset{\frown}{MT}$ a la même aire que celle limitée par [M'N'], [N'T'] et l'arc $\overset{\frown}{M'T'}$. On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles OMP et OM'P' sont isométriques.

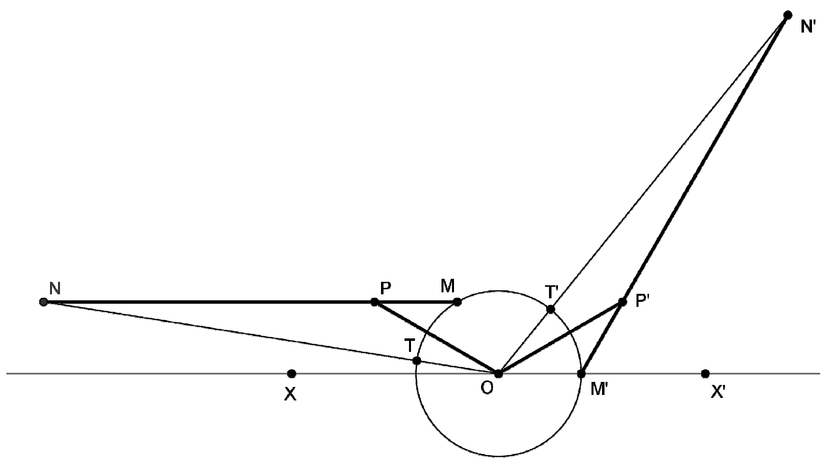
Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments [NT] et [N'T'] et les arc de cercle $\overset{\frown}{NN'}$ et $\overset{\frown}{TT'}$.

L'aire de cette portion de plan est donc $\mathcal{A} = \frac{1}{3}\left(\pi.ON^2 - \pi.OT^2\right) = \frac{\pi}{3}\left(OB^2 - OA^2\right)$

Or, $OA^2 = a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH,

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = OH^2 + \left(HC + CB\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2} + 4a\right)^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{121}{4}\right)a^2 = 31a^2$$

L'aire cherchée est donc $\mathcal{A} = \frac{\pi}{3}\left(31a^2 - a^2\right) = \frac{\pi}{3}\times 30a^2 = 10\pi a^2$ $\boxed{\mathcal{A} = 10\pi a^2}$

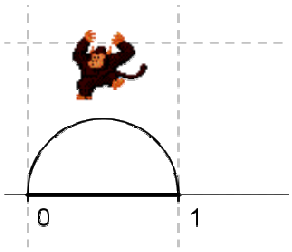


Exercice National 2 : Le singe sauteur

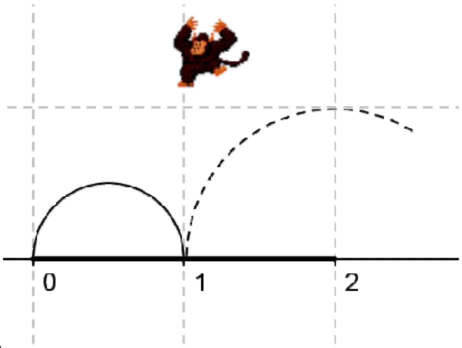
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre *n* est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse *n* en **exactement** *n* bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, *n* (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment [0 ; *n*].

Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.

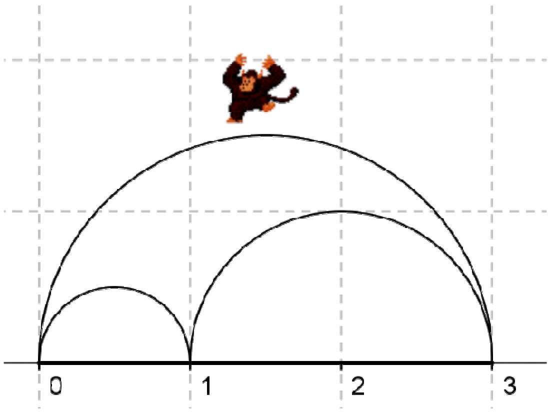


Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle [0 ; 2].



.

Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle [0 ; 3]) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier *m*, on a : $1+2+3+....+m=\frac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5.
   a. Montrer que si le nombre entier *n* est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier *n* pour qu'il soit atteignable.
   b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose N $\geq$ 6 et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 … Montrer que N+4 est aussi atteignable.

Eléments de correction (proposés par l'académie de Montpellier)

1. **1.** Le nombre 4 est atteignable car 1+2-3+4=4.
2. **2.** Le singe n'a le choix : 1+2-3+4 et … il est bloqué !!
3. **3.** Le nombre 9 est atteignable car on a 1+2+3-4+5-6+7-8+9=9, sans jamais sortir de l'intervalle [0 ; 9].
4. **4.** Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner 1+2+3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle [0 ; 16]. L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :

$$1+2+3+.....+n-(n+1)+(n+2)-(n+3)+(n+4)..........-(n^2-1)+n^2=$$
$$\frac{n(n+1)}{2}+1+1+1+.................+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n^2-n}{2}=n^2$$

   d'où n^2 est atteignable. Les seules difficultés sont le comptage des termes valant 1 et la vérification du fait que l'on reste bien dans l'intervalle [0 ; n^2].
5. **5.** Si le nombre *n* est atteignable, il existe des a_i valant 1 ou -1 telles que $1+2a_2+3a_3+......+(n-1)a_{n-1}=0$. Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme S_+ des termes négatifs dont on note la somme S_- . On a alors : $S_+=S_-$. On calcule ensuite :

$$1+2+3+.......+(n-1)=S_+-S_-=2S_+$$

   On en déduit que : $\frac{(n-1)n}{2}=2S_+$ d'où $n(n-1)=4S_+$ et donc 4 divise le produit *n(n-1)*. Donc *n* est de la forme 4*k* ou 4*k*+1. Par exemple 18 n'est pas atteignable.

   La réciproque est fausse puisque 5 n'est pas atteignable.

6. **6.** L'idée est de transformer une configuration de signes + - en - +, cela va ajouter 2 au nombre N. Ensuite on complète par la suite -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4) et l'on

trouve N+4. On note S(i) la somme partielle des *i*-premiers termes. Remarquons que la séquence donnant N se termine par -(N-1)+ N. La séquence commence par 1+2+3 et le premier signe – apparaît en position i+1. Alors S(i-1) ≥ i, car S(3) ≥ 4. On change alors la sous-séquence i-(i+1) en –i+(i+1), ce qui est possible. On ajoute la séquence -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4), ce qui assure que N+4 est atteignable. Question subsidiaire : est-il vrai que les nombres de la forme N=4k ou 4k+1, hormis 5, 8, 12, 17 sont atteignables ?

Zone Amériques-Caraïbes

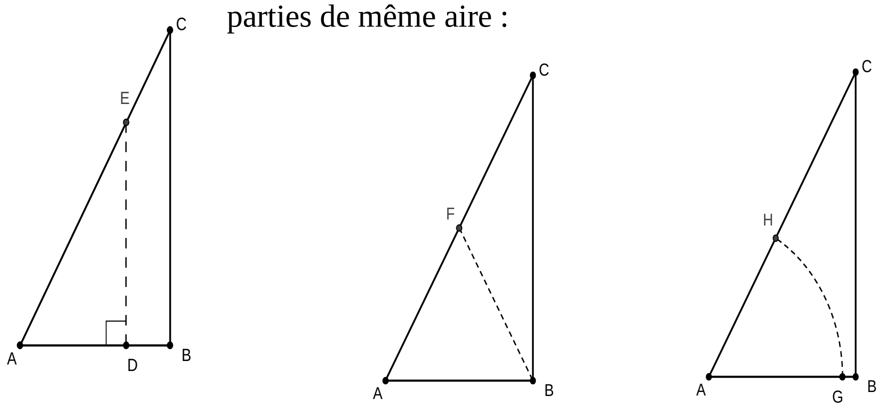
Sujet National 1 : Découpage d'un triangle

Partie A

Soit ABC un triangle rectangle en B, tel que l'angle en A mesure 60°. On supposera de plus que l'aire du triangle ABC est 2.

1. Justifier que la longueur AB vaut $\dfrac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}}$.

On propose ci-dessous trois découpages, le long d'une ligne en pointillé, du triangle ABC en deux parties de même aire :



découpage 1 *découpage 2* *découpage 3*

Dans les découpages 1 et 2, les lignes (en pointillé) [DE] et [BF] sont des segments.

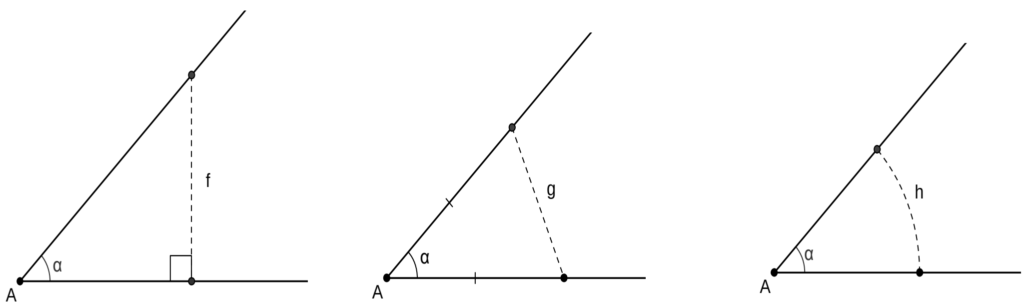
Dans le découpage 3, la ligne (en pointillé) $\overset{\frown}{GH}$ est un arc de cercle de centre A.

2. Déterminer les longueurs des segments [DE] et [BF], et la longueur de l'arc $\overset{\frown}{GH}$. Parmi ces trois lignes, quelle est la plus courte ?

3. Proposer un autre découpage du triangle ABC en deux parties de même aire par une ligne de longueur inférieure aux trois lignes précédentes.

Partie B

Deux demi-droites d'origine A forment un angle aigu α.
Sur les trois figures ci-dessous, la ligne en pointillé délimite entre les demi-droites une surface d'aire de mesure 1.



Les lignes (en pointillé) de longueur f et g sont des segments, la ligne de longueur h est un arc de cercle de centre A.

1. Montrer que $h < f$ (on pourra utiliser le résultat suivant, admis : pour un angle aigu non nul, dont la mesure α est exprimée en radian, alors $\alpha < \tan\alpha$).
2. Montrer de même, que $h < g$.
3. Un triangle est d'aire de mesure 2 et d'angles de mesures 40°, 60° et 80°. Proposer, en utilisant l'une des trois méthodes précédentes, un découpage en deux parties de même aire par une ligne la plus courte possible. Préciser la longueur de la ligne obtenue.

Éléments de correction (proposés par l'académie de Limoges)

Partie A

1. En posant a = AB, on a BC = a tan 60° = $a\sqrt{3}$. L'aire de ABC vaut 2, donc $\frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}}{2} = 2$. D'où, après calculs, AB = $\frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}}$.
2. Dans le découpage 1, par un raisonnement similaire à celui utilisé dans la question 1., on trouve $\mathrm{DE} = \sqrt{2\sqrt{3}}$
   Dans le découpage 2, on démontre facilement que ABF est équilatéral, donc BF = $\frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}}$.
   Dans le découpage 3, on doit avoir $\frac{1}{6}\pi\times\mathrm{AG}^2 = 1$, d'où AG = $\sqrt{\frac{6}{\pi}}$. L'arc $\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ est le sixième du cercle de centre A et rayon AG, d'où, après calcul, l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ mesure $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$.
   Le calcul de valeurs approchées des trois longueurs permet de conclure que la plus courte est l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$.
3. Une solution possible est par exemple de tracer l'arc de cercle centré en C : on obtient une surface d'aire 1 en prenant pour rayon $\sqrt{\frac{12}{\pi}}$. L'arc mesure alors $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$, qui est bien plus court que les trois lignes définies précédemment.

Partie B

On calcule d'abord les longueurs des trois lignes en fonction de α :

On trouve f = $\sqrt{2\tan\alpha}$; g = $2\sqrt{\tan\frac{\alpha}{2}}$; h = $\sqrt{2\alpha}$.

1. On a $\alpha < \tan\alpha$ donc $2\alpha < 2\tan\alpha$ d'où $\sqrt{2\alpha} < \sqrt{2\tan\alpha}$.

2. On a $\sqrt{2\alpha} = \sqrt{4\dfrac{\alpha}{2}} = 2\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}$. Or $\dfrac{\alpha}{2} < \tan\dfrac{\alpha}{2}$, on en déduit donc après calculs que

   $\sqrt{2\alpha} < 2\sqrt{\tan\dfrac{\alpha}{2}}$.

3. La question précédente montre que parmi les trois méthodes, celle qui donne la ligne la plus courte est l'arc de cercle construit sur l'angle le plus aigu, car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante. La longueur de la ligne est donc $\dfrac{2}{3}\sqrt{\pi} \approx 1{,}18$ et le rayon de l’arc de cercle vaut $\dfrac{3}{\sqrt{\pi}} \approx 1{,}69$. Encore faut-il s’assurer que le découpage est bien possible, ce que l’on fait a posteriori en s’assurant que les 2 cotés associés à l’angle de mesure 40^o ont des longueurs suffisantes. Notons A, B, C les sommets aux angles de mesures 40^o, 60^o, 80^o et a, b, c les longueurs des cotés. En calculant l’aire du triangle on obtient bc sin(40)=ac sin(60)=ab sin (80)=4. Ce qui donne bc ≈ 6,22 ; ac ≈ 4,61 ; ab ≈ 4,06. On en déduit facilement que a<b<c et les rapports b/a ≈ 1,35 ; c/a ≈ 1,53 ; c/b ≈ 1,13. On trouve alors a ≈ 1,73 ; b ≈ 2,35 et c ≈ 2,65 et on peut effectuer largement la découpe (faire un dessin).

Exercice national 2 : Les k-nombres

Pour un entier $k \geqslant 2$ fixé, on appelle k-nombre tout entier relatif N pouvant s’écrire sous la forme

$$N = 1 \pm 2 \pm \cdots \pm k.$$

Par exemple, si $k = 2$, les 2-nombres sont

$$1 - 2 = -1 \quad \text{et} \quad 1 + 2 = 3,$$

tandis que si $k = 3$, les 3-nombres sont

$$1-2-3=-4, \quad 1+2-3=0, \quad 1-2+3=2 \quad \text{et} \quad 1+2+3=6.$$

Dans cet exercice, on pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant :

$$1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

1.
   a. Donner la liste des 4-nombres, rangés par ordre croissant.
   b. L’entier 11 est-il un 5-nombre?

2.
   a. Exprimer en fonction de k le plus grand k-nombre et le plus petit k-nombre.
   b. Quel est le plus petit entier $k \geqslant 2$ tel que 51 soit un k-nombre?

3.
   a. Pour un entier $k \geqslant 2$ fixé, montrer que tous les k-nombres ont la même parité.
   b. Déterminer les entiers $k \geqslant 2$ pour lesquels les k-nombres sont impairs.

4. Pour $k = 2$ et $k = 3$, on peut remarquer que l'écriture de tout k-nombre N sous la forme

$$N = 1 \pm 2 \pm \cdots \pm k$$

est unique.

a. Préciser toutes les valeurs de k pour lesquelles cela est le cas.
b. Peut-on trouver un entier k pour lequel il existe un k-nombre N admettant **au moins** 2011 écritures
différentes sous la forme

$$N = 1 \pm 2 \pm \cdots \pm k\,?$$

(On pourra évaluer, pour k fixé, le nombre d'écritures possibles donnant des k-nombres et par ailleurs majorer le nombre de k-nombres.)

Éléments de correction (proposés par l'académie de Clermont-Ferrand)

a. Pour $k = 4$, on trouve
$1-2-3-4=-8, \quad 1+2-3-4=-4, \quad 1-2+3-4=-2,$
$1-2-3+4=0, \quad 1+2+3-4=2, \quad 1+2-3+4=4,$
$1-2+3+4=6 \quad \text{et enfin} \quad 1+2+3+4=10.$

b. L'entier 11 est un 5-nombre puisque$11 = 1-2+3+4+5$.

1.

a. Le plus grand k-nombre est $1+2+3+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ tandis que le plus petit k-nombre est $1-(2+3+\cdots+k) = 2-(1+2+3+\cdots+k) = 2-\dfrac{k(k+1)}{2}$.

b. Pour que 51 soit un k-nombre, il faut déjà que $\frac{k(k+1)}{2} \geqslant 51$, c'est-à-dire $k(k+1) \geqslant 102$ donc $k \geqslant 10$. On essaie alors pour $k = 10$. On peut commencer par additionner les termes en partant de 10, jusqu'à dépasser 51 :

$$10+9+8+7+6+5+4+3 = 52$$

puis $52-2+1 = 51$. Ainsi, $51 = 1-2+3+4+5+6+7+8+9+10$.
Finalement, le plus petit entier k tel que 51 soit un k-nombre est $k = 10$.

2.

a. Soit $k \geqslant 2$ et $N = 1 \pm 2 \pm \cdots \pm k$ un k-nombre. On note A la somme des entiers positifs intervenant dans N avec un signe $+$ et B la somme des entiers positifs intervenant dans N avec un signe $-$ (donc $B = 0$ s'il n'y en a pas). Alors $A - B = N$ tandis que $A + B = 1+2+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. Ainsi, $N = A+B-2B = \dfrac{k(k+1)}{2} - 2B$. Donc N est de même parité que le plus grand k-nombre, à savoir $\dfrac{k(k+1)}{2}$.

b. Tous les k-nombres ont la parité de $\frac{k(k+1)}{2}$. Si k admet r pour reste et q pour quotient dans la division euclidienne par 4, k s'écrit $4q+r$ donc

$$k(k+1) = (4q+r)(4q+r+1) = 4(4q^2+2qr+q)+r(r+1), \text{ et}$$
$$\frac{k(k+1)}{2} = 2(4q^2+2qr+q)+\frac{r(r+1)}{2}.$$

Ainsi, $\frac{k(k+1)}{2}$ a la même parité que $\frac{r(r+1)}{2}$, donnée par le tableau ci-dessous :

r	$\frac{r(r+1)}{2}$	parité
0	0	pair
1	1	impair
2	3	impair
3	6	pair

Les entiers k qui fournissent des k-nombres impairs sont donc les entiers de la forme $4q+1$ ($q > 1$) ou $4q+2$ ($q \geqslant 0$).

3.

a. Pour $k=4$, on a vu que les 4-nombres étaient au nombre de 8 et il y a $2^3 = 8$ possibilités de choisir les signes $\pm$ donc 8 écritures possibles. Ainsi, chaque 4-nombre a une et une seule écriture possible. Ensuite, pour $k \geqslant 5$, ce n'est plus jamais le cas puisque par exemple,

$$\frac{k(k+1)}{2} - 10 = 1-2-3+4+5+\cdots+k = 1+2+3+4-5+\cdots+k.$$

Les entiers k pour lesquels tout k-nombre admet une seule écriture sous la forme

$$1 \pm 2 \pm \cdots \pm k$$

sont donc $2, 3$ et 4.

b. Le plus grand k-nombre est $M_k = \frac{k(k+1)}{2}$, le plus petit est $N_k = 2 - \frac{k(k+1)}{2}$ mais tous ont la même parité, donc tous sont de la forme $M_k - 2p$ avec p entier et $0 \leqslant p \leqslant M_k - 1$. Il y a ainsi au plus M_k k-nombres[1]. Si chaque k-nombre possède strictement moins de 2011 écritures, il existe alors strictement moins de $2011 \times \frac{k(k+1)}{2}$ écritures possibles. Par ailleurs, il y a 2^{k-1} choix possibles pour déterminer les signes $\pm$ d'un k-nombre, donc 2^{k-1} écritures possibles. Si aucun k-nombre ne possède au moins 2011 écritures différentes, on doit avoir

$$2^{k-1} < 2011 \times \frac{k(k+1)}{2},$$

ce qui n'est pas le cas pour $k = 20$. Il existe donc un 20-nombre possédant au moins 2011 écritures différentes.

[1] On peut montrer qu'il y en a $(M_k - 2)$ mais ce n'est pas utile pour la question.

Zone Océanie

Exercice national 1 : Suite de nombres

L'exercice consiste à étudier les nombres obtenus **en partant du nombre 1** par une succession d'étapes, de la manière suivante : un nombre obtenu à l'une des étapes est remplacé à l'étape suivante soit par sa moitié (étape codée M) soit par son complément à 1(étape codée C).
Ainsi par exemple :

- la première étape consiste toujours à passer de 1 soit à $\frac{1}{2}$ (étape M) soit à 0 (étape C).
- la succession d'étapes M puis M puis C puis M, notée MMCM, conduit au nombre $\frac{3}{8}$ par le chemin $1 \to \frac{1}{2} \to \frac{1}{4} \to \frac{3}{4} \to \frac{3}{8}$.
- à partir du nombre $\frac{3}{8}$ on peut obtenir, à l'étape suivante, soit $\frac{3}{16}$ (étape M) soit $\frac{5}{8}$ (étape C).

1. Quels sont les nombres obtenus après chacune des successions :
   a. CMM (C puis M puis M)
   b. MMMCM (M puis M puis M puis C puis M)
   c. CCCCCC

2. Donner tous les nombres que l'on peut obtenir au bout de 3 étapes, puis de 4 étapes.

3. Montrer que tous les nombres obtenus, au bout d'un nombre quelconque d'étapes, sont dans l'intervalle [0 ; 1].

4. Écrire, dans les trois cas suivants, une succession d'étapes permettant d'obtenir les nombres indiqués :
   a. $\frac{3}{2^8}$
   b. $\frac{253}{256}$
   c. $\frac{2011}{2^{2011}}$

5. Soient n et N deux entiers naturels tels que N est impair et $N < 2^n$. Écrire un algorithme permettant d'atteindre le $\frac{N}{2^n}$ en un nombre fini d'étapes. Conclure.

Eléments de correction (proposés par l'académie de Nantes)

1. On obtient respectivement les nombres : $0, \frac{7}{16}, 1$.
2. Après la 3$^{\text{ème}}$ étape on obtient l'un des nombres : $0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.

Après la 4ème étape on aboutit à l'un des nombres : $0, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1$.

3. Les applications M et C préservent l'intervalle [0,1]

4.

   a. MMCMMMMMM donne $3/2^8$

   b. MMCMMMMMC donne 253/256.

   c. La succession MMCMCMMCMCMMMMMC aboutit à $2011/2^{11}$.

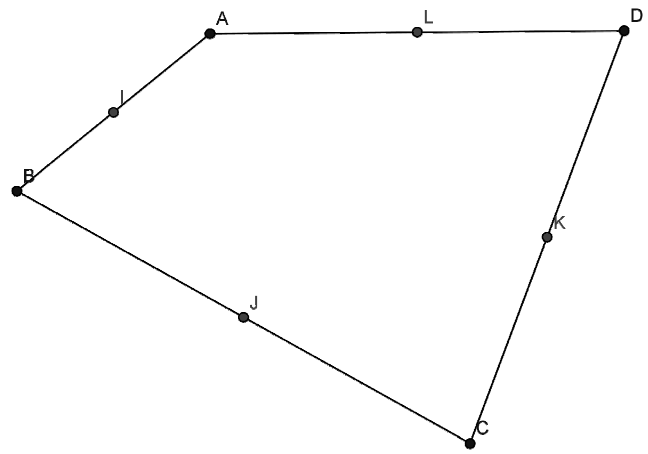
5. L'algorithme explicité dans la réponse du 4c fournit une solution.

On part de $\frac{N}{2^n}$, compris entre 0 et 1, et à chaque étape, soit on double le nombre s'il est inférieur à 1/2, étape notée (D) inverse de (M), soit on prend son complément à 1, étape notée (C) inverse de (C). Chaque étape conduit à une fraction irréductible de la forme $\frac{a}{2^m}$, comprise entre 0 et 1, où *a* et *m* sont deux entiers naturels. Les étapes DD, DC et CD, appliquées à ce nombre, conduisent respectivement à $\frac{a}{2^{m-2}}$, $\frac{2^{m-1}-a}{2^{m-1}}$ et $\frac{2^m-a}{2^{m-1}}$. Au bout de deux étapes successives, le dénominateur est donc divisé par 2 ou par 4. En partant de $\frac{N}{2^n}$, on aboutit donc à un dénominateur égal à 1 avec au plus *2n* étapes. En inversant la démarche on obtient une succession aboutissant à $\frac{N}{2^n}$ en partant de 1.

```
Entrée (k, n)
X=liste vide ; Vérifier k impair et k < 2^n
Tant que n>0
        Si k≤2^(n-1) faire X ← concat(M,X) et n ← n-1
                   sinon X← concat(C,X) et k← 2^n –k
   fin de tant que ;
   afficher X
```

Exercice national 2 : La pelouse arrosée

Un jardinier doit arroser une pelouse, assimilée à un quadrilatère convexe ABCD quelconque (voir la figure ci-dessous pour un exemple). Pour cela, il place un arroseur automatique à chacun des milieux I, J, K et L des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].



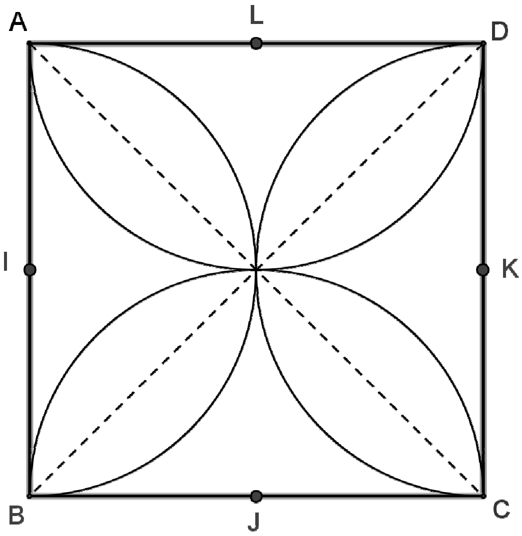
La portée du jet de l'arroseur situé en I est de mesure $\frac{AB}{2}$. Le jet commence par arroser le segment [IA], puis il pivote de 180°, pour arroser le segment [IB]. Chacun des trois autres arroseurs est réglé de manière analogue. Les quatre arroseurs arrosent ainsi quatre demi-disques.

1-Montrer que, dans le cas d'une pelouse de forme carrée, toute la surface est arrosée.

2-Est-ce encore vrai dans le cas général ?

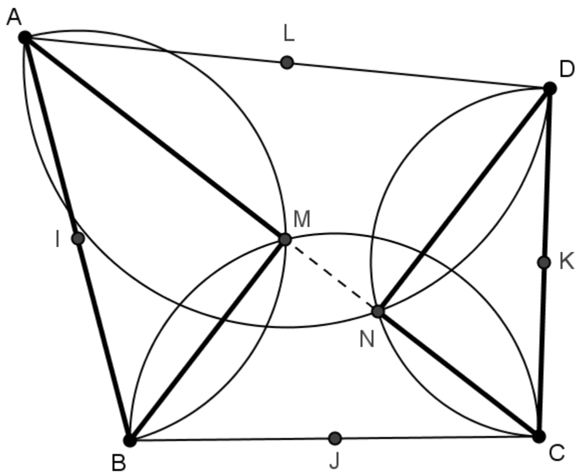
Eléments de correction (proposés par l'académie d'Amiens)

1- Dans le cas du carré, on peut démontrer facilement que les triangles isocèles formés par les cotés et les diagonales sont des surfaces atteintes par les arrosoirs car inclus dans les demi-cercles.



2- Les cercles de diamètres [AB] et [BC] ne sont pas tangents (car l'angle $\widehat{ABC}$ n'est pas plat), donc ils se coupent en un point autre que B. Appelons-le M.
Les triangles AMB et BMC sont rectangles en M (car inscrits dans des demi-cercles). Donc l'angle $\widehat{AMC}$ est plat. Ce qui signifie que le point M est aligné avec A et C.

Ensuite, le demi-cercle centré en I arrose au moins le triangle AMB. Et celui centré en J arrose au moins le triangle BMC. Donc le triangle ABC est arrosé par ces deux arroseurs.
On peut faire de même en définissant N comme point d'intersection des deux autres demi-cercles. Et ces demi-cercles arrosent au moins le triangle ADC.
Finalement, on constate bien que toute la pelouse est arrosée.



<u>Autre méthode :</u>

Prenons un point M quelconque sur la pelouse.
On alors : $\widehat{AMB}+\widehat{BMC}+\widehat{CMD}+\widehat{DMA}=360°$.
Par conséquent, l'un au moins des quatre angles est supérieur ou égal à 90° (par l'absurde : si tous les quatre sont strictement inférieurs à 90°, la somme ne peut pas faire 360°).

Sur la figure ci-dessous, on a par exemple $\widehat{AMB} \geq 90°$. Cela implique que le point M se trouve à l'intérieur du demi-disque de diamètre [AB]. Il est donc arrosé par l'arroseur situé en I.

Donc, dans tous les cas, le point M sera atteint par l'un des quatre arroseurs.