OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE VERSAILLES
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices de l'académie de Versailles

La deuxième partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 4 et 5.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 4 et 6.

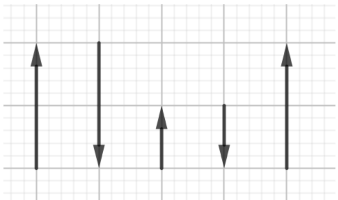
Exercice académique 4 (à traiter par tous les candidats)

Deux pilotes pour un robot

Un robot se déplace en ligne droite, animé par un moteur. Une instruction de son programme lui fait faire demi-tour chaque fois qu'il a parcouru a cm, une autre lui fait faire demi-tour chaque fois qu'il a parcouru b cm. Lorsque ces deux instructions doivent être exécutées simultanément, le robot continue en ligne droite.

Ainsi, si $a = 2$ et $b = 5$, le robot va parcourir 2 cm dans une direction, puis 2 cm dans la direction contraire puis 1 cm dans la première direction. Il aura alors parcouru 5 cm et fera demi-tour une troisième fois.

Les vecteurs associés aux cinq premiers mouvements sont :



Au départ le robot est placé au centre d'une table de rayon 1 m.

1 . On suppose que $a = 5$ et $b = 8$.

a. Décrire les 16 premiers cm parcourus par le robot.

b. Montrer qu'après avoir parcouru 40 cm, le robot repart dans le sens opposé à celui qu'il avait au départ.

c. Le robot risque-t-il de tomber de la table ?

2. On suppose maintenant que $a = 5$ et $b = 9$.

a. Après avoir parcouru 45 cm, dans quel sens le robot repart-il ?

b. Le robot risque-t-il de tomber ?

3. Si $a = 6$ et $b = 14$, le robot pourra-t-il tomber ?

4. On suppose maintenant que lorsque les deux instructions doivent être exécutées en même temps, le robot fait demi-tour.

Peut-on programmer le robot de manière à ce qu'il tombe de la table quel qu'en soit le rayon ?

Exercice académique 5 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Colorations

Dans cet exercice, pour différentes valeurs de l'entier n, on considère un polygone à n sommets du plan. Chaque segment reliant deux de ces n sommets est coloré soit en bleu, soit en rouge. Un triangle est dit *monochrome* si ses trois sommets sont des sommets du polygone et si ses trois côtés sont de la même couleur.

1. Dans le cas $n = 4$, donner un exemple de coloration des six segments reliant les sommets d'un quadrilatère qui ne crée aucun triangle monochrome.
2. Dans le cas $n = 5$, donner un exemple de coloration des dix segments reliant les sommets d'un pentagone qui ne crée aucun triangle monochrome.

3. Dans toute cette question, on suppose que $n = 6$. On se donne donc un hexagone ABCDEF et une coloration arbitraire des quinze segments reliant deux à deux les sommets de cet hexagone.
a. Justifier que, parmi les segments reliant le sommet A aux autres sommets, il y en a au moins trois de la même couleur. En déduire que la coloration crée au moins un triangle monochrome.
b. Si les points X, Y et Z sont trois des sommets de l'hexagone, on dit que *le couple* (X, Y) *est rouge-bleu de sommet* Z si le segment [XZ] est rouge et le segment [YZ] bleu.
Justifier qu'il y a au maximum 6 couples « *rouge-bleu de sommet* A ».
c. En déduire que, parmi les vingt triangles dont les sommets sont ceux de l'hexagone, il y a au moins deux triangles monochromes.
d. Donner un exemple de coloration des quinze segments reliant deux à deux les sommets de l'hexagone qui crée exactement deux triangles monochromes.

4. Dans cette question, on suppose que $n = 7$.
a. Donner un exemple de coloration des vingt-et-un segments reliant deux à deux les sommets d'un heptagone qui crée exactement quatre triangles monochromes.
b. Prouver que, quelle que soit la coloration choisie des segments reliant les sommets d'un heptagone, elle crée au moins quatre triangle monochromes.

Exercice académique 6 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Sauvé par la littérature

Léo passe un examen de culture générale. Il a convenablement répondu à 70% des questions d'histoire, 60% des questions portant sur les arts, 55% des questions portant sur la littérature et 20% des questions portant sur les sciences.
La première partie de l'examen ne comportait que des questions d'histoire et de littérature. Sur l'ensemble, 60% de ses réponses ont été correctes.
La seconde partie a été moins heureuse : sur l'ensemble des questions portant sur les arts et les sciences, le pourcentage de ses réponses correctes est seulement 40%.
On appellera respectivement $(H, h), (A, a), (L, l), (S, s)$ les couples représentant le nombre de questions et le nombre de réponses correctes dans chacun des domaines.
Le verdict tombe : Sur l'ensemble, Léo a fourni une majorité de réponses correctes.
Quelle est la valeur minimale du rapport L/S permettant ce résultat ?

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

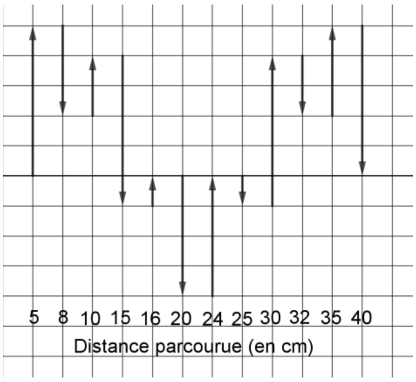
Épreuve ▪ 2020

Olympiades 2020
Académie de Versailles
Éléments de solution

Exercice 4

Deux pilotes pour un robot

1 . *a.* Le robot fait demi-tour après avoir parcouru 5, 8, 10, 15 et 16 cm.

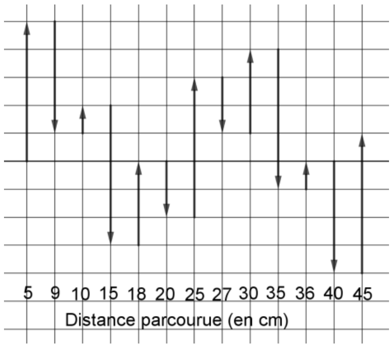


Il part, disons, vers la droite et parcourt 5 cm, fait demi-tour jusqu'à avoir parcouru 8 cm, repart vers la droite pour 2 cm, puis vers la gauche pour atteindre un total de 15 cm, puis fait demi-tour pour un dernier cm. Remarquons que le sens de déplacement n'est pas lié à a ou b.

b. Le dessin ci-contre illustre ces déplacements. Après 40 cm, le robot reçoit deux instructions qui s'annulent et continue dans la direction dans laquelle il allait. Celle-ci est contraire à celle qu'il avait au départ.

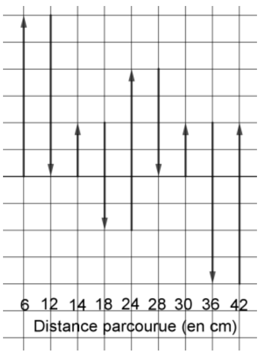
c. Après avoir parcouru 40 cm, le robot est revenu à son point de départ, dont il ne s'est pas éloigné de plus de 5 cm. Les mouvements à venir seront identiques aux premiers, quoique dans le sens contraire. Le robot ne peut tomber de la table.

2. *a.* Les instructions contraires s'annulant, le robot poursuit dans la direction de son dernier mouvement. Le nombre de multiples de 5 ou 9 entre 5 et 45 (45 compté une seule fois) étant impair, il continue dans la direction de son premier mouvement et parvient à 1 cm de son point de départ.



b. Lors de ses déplacements suivants, il s'écarte du centre de la table d'1cm tous les 13 mouvements, plus 5 cm pour le premier mouvement d'une nouvelle série.

Si l'expérience se poursuit, le robot finit par tomber de la table.



3. Pour $a = 6$ et $b = 14$, des mouvements identiques aux 9 précédents se produisent (le robot a parcouru 42 cm, les instructions contraires s'annulent, le robot continue). On part cette fois d'un point situé à 2 cm du centre de la table. Après 48 séries de 9 mouvements, il s'en est écarté de 96 cm et repart dans la même direction pour 6 cm… et chute.

4. Soit m le plus petit multiple commun à a et b et Δ leur plus grand diviseur commun. Posons $a = a'\Delta$ et $b = b'\Delta$. Le nombre de multiples non nuls de a inférieurs ou égaux à m est b'. Le nombre de multiples non nuls de b inférieurs ou égaux à m est a'. Le nombre de mouvements du robot pour parcourir m cm est donc $a' + b' - 1$.

SI le robot a effectué un nombre pair de mouvements pour parcourir m cm, le dernier étant effectué dans le sens contraire du premier, les $a' + b' - 1$ mouvements à venir sont identiques aux premiers

Si le robot a effectué un nombre impair de mouvements, le dernier est effectué dans le même sens que le premier, et les mouvements à suivre sont effectués dans le sens contraire à leurs homologues.

Dans le premier cas, si le robot s'est écarté du centre de la table d'une distance d après la première série de mouvements, chaque nouvelle série ajoute d à cet écart. Le robot peut tomber, sauf si $d = 0$.

Dans le second cas, il s'écarte de son nouveau point de départ d'une distance d et revient donc au centre de la table.

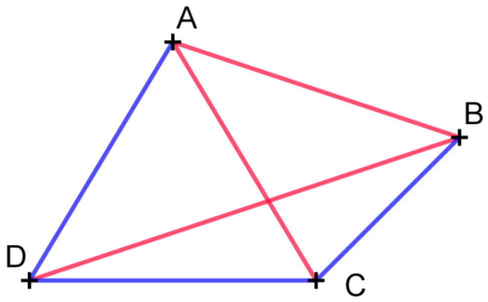
Reste évidemment la possibilité d'une chute lors des premiers mouvements (exemple $a = 51$ et $b = 52$)…

Olympiades 2020
Académie de Versailles
Éléments de solution

Exercice 5

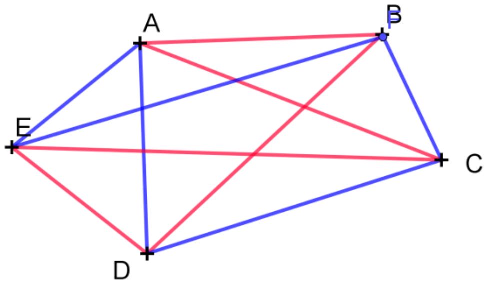
Colorations

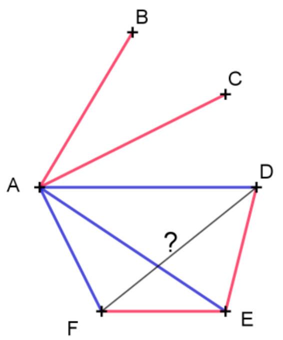
Avertissement : il arrive dans la suite qu'on fasse référence à une figure explicite. Ce n'est pas ici fautif, car l'ordre des points ou la convexité n'interviennent pas. À la question ***4****, on raisonne sur une figure possédant deux triangles monochromes bleus ayant un côté commun. C'est le* minimum minimorum*, si on peut dire, du cas de l'hexagone, car il est un minimum pour le nombre d'arêtes concernées.*



1. Sur la figure ci-contre, les triangles ABC et ABD ont deux côtés rouges et un bleu, les triangles ACD et BCD ont deux côtés bleus et un rouge.

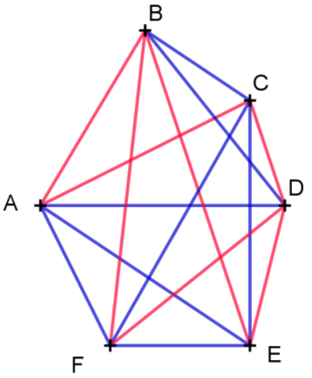
2. Dans le cas $n = 5$, on complète la figure précédente par le point E et les segments issus de E, en veillant à ce que ces segments ne créent pas de triangle monochrome.



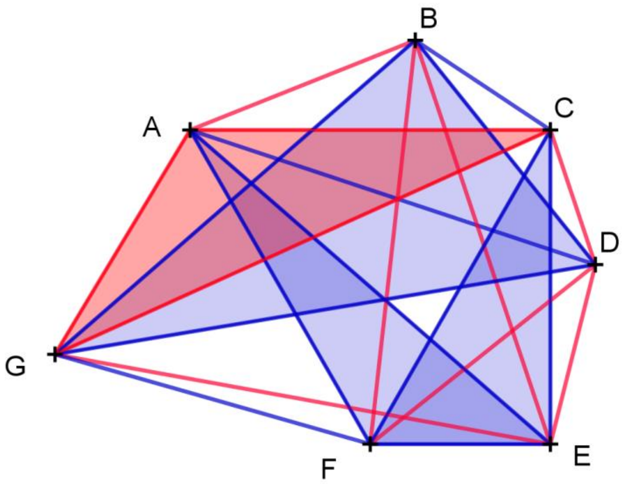


3. ***a.*** Cinq segments joignent A aux autres sommets de l'hexagone. Il y a deux couleurs, donc au moins trois sont de la même couleur (peu importe qu'ils soient voisins comme sur la figure ou non). Pour éviter que les triangles ADE et AEF soient monochromes, on donne aux segments [DE] et [FE] l'autre couleur, mais si on fait de même avec le segment [FD], c'est le triangle DEF qui est monochrome. Donc il y a au moins un triangle monochrome.

b. Il y a cinq segments de sommet A, donc dix couples (B, C), (B, D), (B, E), (B, F), (C, D), (C, E), (C, F), (D, E), (D, F), (E,F) susceptibles d'être rouges-bleus de sommet A. Si tous les segments issus de A sont rouges, il n'y a aucun couple rouge-bleu de sommet A. Si seul le segment [AF] est bleu, il y a 4 couples rouge-bleu : (B, F), (C, F), (D, F) et (E, F). Si les segments [AE] et [AF] sont bleus, les couples (B, E), (B, F), (C, E), (C, F), (D, E), (D, F) sont rouge-bleu de sommet A. Le décompte qui vient d'être fait est indépendant de l'ordre des points. On conclut par symétrie : 6 est le maximum (un couple bleu-rouge dans un sens est rouge-bleu dans l'autre).



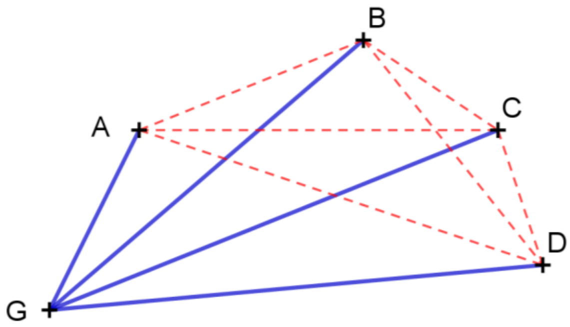
c. Ce maximum peut-il être atteint en tout sommet de l'hexagone ? S'il en était ainsi, il y aurait 36 couples rouge-bleu dont chaque triangle non-monochrome contient exactement 2 (si [MN] est rouge, [NP] bleu et par exemple [PM] bleu, il y a un couple rouge-bleu de sommet M et un de sommet N). Cela donne au maximum 18 triangles non-monochromes… sur 20. Il reste donc (au minimum, cette fois) 2 triangles monochromes.



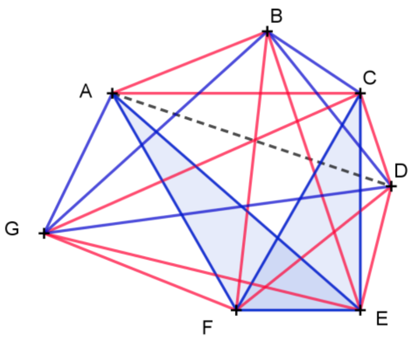
d. Dans la figure ci-contre, les triangles AEF et CEF sont les seuls triangles monochromes dont les côtés soient des diagonales ou des côtés d'un hexagone.

4. ***a.*** La figure de gauche montre un heptagone avec quatre triangles monochromes, un rouge et trois bleus.

b. On ajoute le point G à la figure de l'hexagone précédent qui comporte le minimum de triangles monochromes, 2. Supposons que ces deux triangles monochromes sont bleus et ont un côté commun (possible sans restreindre la généralité d'après ce qui précède).
Six arêtes ont pour extrémité le point G.
- Si ces six sont bleues, chaque arête bleue appartenant à un triangle monochrome bleu (il y en a cinq) donne naissance à un nouveau triangle monochrome bleu dont le troisième sommet est G. Au total, nous avons au minimum 7 triangles monochromes bleus ;
- si cinq de ces arêtes sont bleues, ou bien c'est [GB] qui est rouge et les cinq arêtes bleues [AF], [AE], [FE], [EC] et [FC] donnent naissance à cinq triangles monochromes bleus comme précédemment. Soit c'est [GA] et les arêtes [FE], [FC], [EC] donnent naissance à trois triangles monochromes bleus, ce qui fait un total de cinq. Même situation si c'est [GC]. Si c'est [GE], il reste [AF] et [CF] (même situation si c'est [GF]) pour donner naissance à deux tringles monochromes bleus, soit au minimum 4.
- si deux de ces arêtes sont rouges et que l'une est [GB], on retrouve une des situations évoquées. Si ce sont [GA] et [GC], il ne reste que [EF] pour donner naissance à un triangle monochrome bleu GEF, mais alors GAC est monochrome rouge (car si [AC] était bleue, le triangle AFC serait monochrome bleu, ce qui en ferait trois pour l'hexagone, au-dessus du minimum). Si ce sont [GA] et [GE] (ou, en changeant ce qui doit être changé [GA] et [GF], ou [GC] et [GE] ou [GC] et [GF]), il reste [FC] pour donner naissance à un triangle monochrome bleu et, parmi



les triangles GBC, GBD, GBF, GCD, GCF, GDF, il y en a au moins un monochrome bleu à moins que l'un parmi BCD, BCF, CDF soit monochrome rouge (cf. **3. *a.***) Enfin, si ce sont [GE] et (GF], la seule façon de ne pas rendre plus de deux triangles monochromes bleus parmi GAB, GAC, GAD, GBC, GBD, GCD est d'avoir un monochrome rouge parmi ABC, ABD, ACD, BCD, n'avoir qu'un monochrome bleu se traduisant par l'apparition d'un monochrome rouge.
- enfin, si trois de ces arêtes sont rouges et trois bleues, comme cela vient d'être rappelé, chaque groupe de trois crée au moins un triangle monochromatique. Cas particulier : ce pourrait être un des triangles monochromes bleus. Supposons donc que les arêtes [GA], [GB], [GD] sont bleues et les autres rouges. Deux des côtés du triangle ABD sont de couleurs différentes (sinon, cela ferait un troisième triangle monochrome dans l'hexagone). Supposons que [BD] est bleue et [AB] rouge. Le triangle ABD est donc monochrome bleu. Si [AD] est rouge, alors,



comme [AC] est rouge (sans quoi ACF est monochrome bleu), le triangle ACD est monochrome rouge (interdit dans l'hexagone) sauf si [CD] est bleue. Mais si [CD] est bleue, le triangle BCD est monochrome bleu (interdit dans l'hexagone) à moins que [BC] soit rouge, mais alors cela ferait un nouveau triangle monochrome rouge dans l'hexagone. Donc [AD] est bleue et il y a deux nouveaux triangles monochromes bleus.
Le minimum du nombre de triangles monochromes pour un heptagone est donc 4.

Olympiades 2020
Académie de Versailles
Éléments de solution

Exercice 6

Sauvé par la littérature

Traduisons les hypothèses en utilisant les notations de l'énoncé :
Pour le premier paragraphe : $h = 0{,}7\,H, \quad a = 0{,}6\,A, \ \ l = 0{,}55L, \quad s = 0{,}2\,S$
Pour le deuxième paragraphe : $h + l = 0{,}6\,(H + L)$
Pour le troisième paragraphe : $a + s = 0{,}4\,(A + S)$.

Utilisons les données du premier paragraphe dans les suivants :
$0{,}7\,H + 0{,}55L = 0{,}6\,(H + L)$ donne $0{,}1\,H = 0{,}05\,L$ ou encore $L = 2H$.
$0{,}6\,A + 0{,}2\,S = 0{,}4\,(A + S)$ donne $0{,}2\,A = 0{,}2\,S$ ou encore $A = S$.

Léo a produit une majorité de réponses correctes : $\frac{a+h+l+s}{A+H+L+S} > \frac{1}{2}$ se traduit par $\frac{0{,}6\,(H+L)+0{,}4\,(A+S)}{A+H+L+S} > \frac{1}{2}$ ou encore $\frac{0{,}9\,L+0{,}8\,S}{1{,}5\,L+2S} > \frac{1}{2}$, soit finalement $0{,}3L > 0{,}4S$ et $\frac{L}{S} > \frac{4}{3}$.

Le nombre de questions de sciences représente moins des trois-quarts de celui des questions de littérature.