SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE VERSAILLES

Classes de première S • 2011

Exercice 1 : Essuie-glaces

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur approchée au cm^2 près.

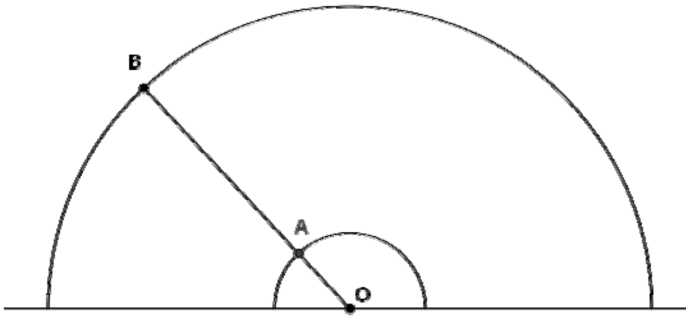


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

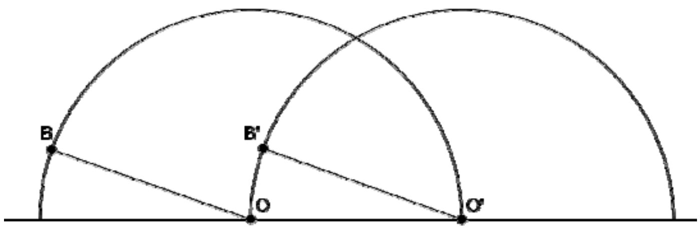


Fig. 2

3.1. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, CB = 4 CA et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose CA = a.
Démontrer que le triangle AOC est isocèle.

Fig.3

3.2. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.
Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de a l'aire de la surface essuyée par le balai.

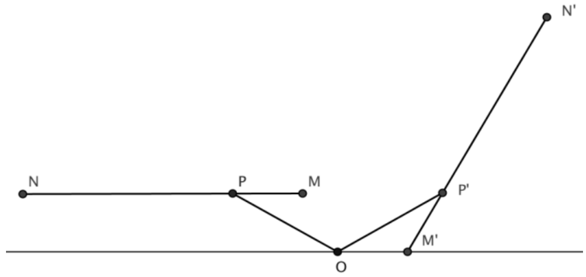


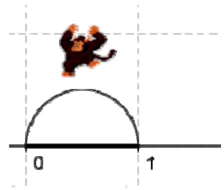
Fig. 4

Exercice 2 : Le singe sauteur

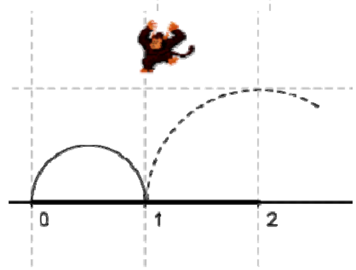
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre n est dit *atteignable* si le singe peut, en partant de l'origine (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en exactement n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, n (effectués dans cet ordre) et sans jamais sortir du segment [0 ; n].

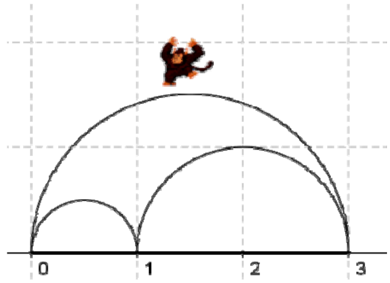
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle [0 ; 2].



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle [0 ; 3]) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis.*

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier m, on a : $1+2+3+....+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5. *a.* Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.

b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose N $\geq$ 6 et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 … Montrer que N + 4 est aussi atteignable.

Exercice 3 : Fabrique de triplets

Préliminaires

1. Soit x et y deux nombres réels strictement inférieurs à 1. On note S leur somme et P leur produit. Montrer que $S < P+1$.

2. Quel est le sens de variation de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{1}{x}$?

Recherche de triplets

On s'intéresse aux triplets (a,b,c) tels que $0 < a \leqslant b \leqslant c$, $abc > 1$ et $a+b+c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

3. Montrer que, pour un tel triplet, $a < 1$.

4. Se peut-il que $b < 1$?

On pourra utiliser les préliminaires.

5. Se peut-il que $b = 1$?

6. Alice affirme : « Si $a < 1 < b$ et $b \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}$, alors on peut trouver un réel c tel que le triplet (a,b,c) soit solution. A-t-elle raison ?

7. Bob ajoute : « Ces conditions ne sont pas nécessaires ». A-t-il raison ?

Exercice 4 : Billard dans un angle

Pour faciliter la lecture des copies, la mesure d'angle utilisée dans cet exercice est le degré.
On considère deux demi-droites [Ox) et [Oy) et un point A de la demi-droite [Ox) tel que OA = 1.
On note θ une mesure de l'angle $\widehat{x\mathrm{O}y}$.
Étant donné un point B sur la demi-droite [Oy), on construit, si possible, le point C du segment [OA] tel que CA = CB.

1. On note α une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{OAB}}$. Pour quelles valeurs de α peut-on construire le point C ?

2. On suppose qu'on a pu construire le point C. On construit alors, si possible, un point D du segment [OB] tel que DB = DC. Pour quelles valeurs de α peut-on construire le point D ?

3. On continue le processus précédent, construisant ainsi tant qu'il est possible et alternativement des points sur [OA] ou [OB]. Si M et M' sont deux points construits (dans cet ordre) et si on construit le point suivant M'', point du segment [OM] tel que M''M = M''M', on note x et x' les mesures des angles $\widehat{\mathrm{OMM'}}$ et $\widehat{\mathrm{OM'M''}}$. Pour quelle valeur de x a-t-on $x' = x$?

4. On suppose dorénavant qu'on peut construire autant de points qu'on veut.
Pour quelles valeurs de α cela est-il possible ?

5. Quelle relation existe-t-il alors entre la longueur de la ligne formée par les segments joignant A à B, B à C, C à D, …, M à M', M' à M'', etc. et le périmètre du triangle ABC ?
Si le périmètre du triangle ABC vaut $1+\sqrt{2}$, combien vaut θ ?

Eléments de solution

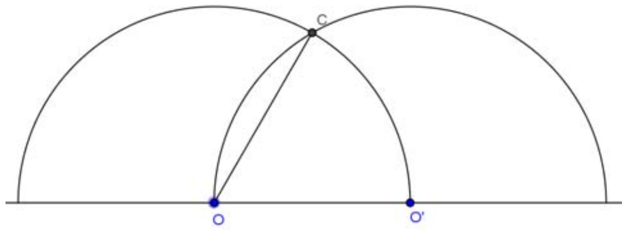
Séries S et STI

Exercice 1 : Essuie-glaces

Cet exercice a été choisi par la cellule nationale. Les éléments de solution qui suivent ont été fournis par l'académie qui a proposé cet exercice.

1. L'aire demandée en cm^2 est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left(\pi.60^2 - \pi 15^2\right) = \frac{1}{2}\pi.3375$ soit en valeur au cm² : $\mathcal{A} = 5301$.

2. Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons L'aire du triangle équilatéral $OO'C$ de côté de longueur R, et donc de hauteur $R\frac{\sqrt{3}}{2}$: $A_1 = \frac{1}{2}\left(R \times \frac{\sqrt{3}}{2} R\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2$.



Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $\widehat{O'OC}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{COO'}$: $A_2 = \frac{\pi R^2}{6}$.

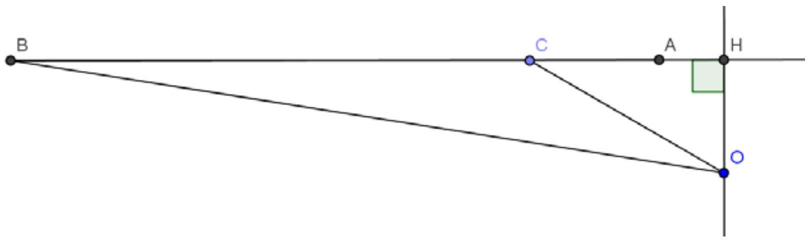
Ainsi l'aire de le portion de plan limitée par la corde [OC] et l'arc $\overset{\frown}{OC}$ sera : $A_2 - A_1$.
L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera donc $A = A_2 + A_2 - A_1 = 2A_2 - A_1$

Donc $A_3 = \frac{\pi}{3} R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2$.

L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un cercle de rayon R privée de A_3 soit

$$\mathcal{A} = \pi R^2 - \left(\frac{\pi}{3} R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 - \right) = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2 \qquad \boxed{\mathcal{A} = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2}$$

3.



1. $\sin \widehat{OCH} = \sin 30° = \frac{1}{2}$ donc $\frac{OH}{OC} = \frac{1}{2}$ soit $OH = \frac{1}{2} a\sqrt{3}$.

De même $\frac{HC}{OC} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $HC = \frac{\sqrt{3}}{2} a\sqrt{3} = \frac{3}{2} a$. Enfin d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en H,

$$OA^2 = HA^2 + HO^2 = \left(HC - CA\right)^2 + HO^2 = \left(\frac{3}{2} a - a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2 .$$

Ainsi $AO = AC$ et donc $\boxed{\text{le triangle } ACO \text{ est isocèle en A.}}$

b. L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$. En degré elle vaut $180 - \widehat{XOM}$ avec X comme sur le dessin. Or les angles $\widehat{XOP}$ et $\widehat{OPM}$ sont alternes internes, et le triangle MOP est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{MOX} = 2 \times 30 = 60°$. Donc l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ a pour mesure 180-60= $\boxed{120°}$.

La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments [MN] et [M'N'] et les arcs $\overset{\frown}{MM'}$ et $\overset{\frown}{NN'}$.
Soient T et T' les intersections du cercle de centre O passant par M et les segments [ON] et [ON']. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment [ON] ayant pour image [ON'], T a donc pour image T'. Les points MTP ont respectivement pour images M' T' N', et la conservation des aires par rotation montre que la portion

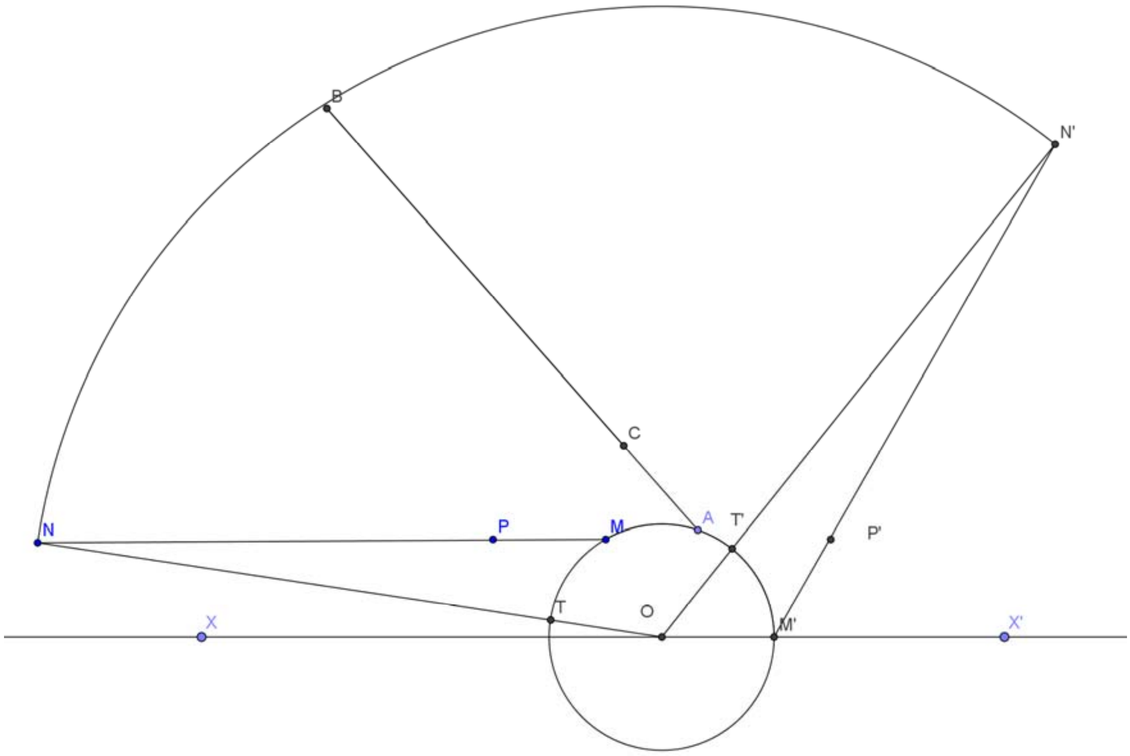
de plan limitée par [MN], [NT] et l'arc $\widehat{MT}$ a la même aire que celle limitée par [$M'N'$] [$N'T'$] et l'arc $\widehat{M'T'}$.
On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles OMN et OM'N' sont isométriques.
Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments [NT] et [$N'T'$] et les arc de cercle $\widehat{NN'}$ et $\widehat{TT'}$.

L'aire de cette portion de plan est donc $\mathcal{A} = \frac{1}{3}\left(\pi.ON^2 - \pi.OT^2\right) = \frac{\pi}{3}\left(OB^2 - OA^2\right)$

Or, $OA^2 = a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH,

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = OH^2 + \left(HC + CB\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2} + 4a\right)^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{121}{4}\right)a^2 = 31a^2$$

L'aire cherchée est donc $\mathcal{A} = \frac{\pi}{3}\left(31a^2 - a^2\right) = \frac{\pi}{3} \times 30a^2 = 10\pi a^2$ $\boxed{\mathcal{A} = 10\pi a^2}$



Exercice 2 : Le singe sauteur

Cet exercice a été choisi par la cellule nationale. Les éléments de solution qui suivent ont été fournis par l'académie qui a proposé cet exercice.

1. Le nombre 4 est atteignable car 1+ 2 – 3 + 4 = 4.
2. Le singe n'a le choix : 1+ 2 – 3 + 4 et … il est bloqué !!
3. Le nombre 9 est atteignable car on a 1 + 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + 7 – 8 + 9 = 9, sans jamais sortir de l'intervalle [0 , 9].
4. Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner 1 + 2 + 3 + 4 – 5 + 6 – 7 + 8 – 9 + 10– 11 + 12 – 13 + 14 – 15 + 16, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle [0, 16]. L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n - (n+1) + (n+2) - (n+3) + (n+4)\ldots\ldots\ldots - (n^2-1) + n^2 =$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2 - n}{2} = n^2$$

d'où n^2 est atteignable. Les seules difficultés sont le comptage des termes valant 1 et la vérification du fait que l'on reste bien dans l'intervalle [0 ; n^2].

5. Si le nombre n est atteignable, il existe des a_i valant 1 ou -1 telles que $1+2a_2+3a_3+......+(n-1)a_{n-1}=0$. Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme S_+ des termes négatifs dont on note la somme S_- . On a alors : $S_+ = S_-$ On calcule ensuite :

$$1+2+3+.......+(n-1)=S_+-S_-=2S_+$$

On en déduit que : $\dfrac{(n-1)n}{2}=2S_+$ d'où $n(n-1)=4S_+$ et donc 4 divise le produit *n(n-1)*. Donc n est de la forme $4k$ ou $4k+1$. Par exemple 18 n'est pas atteignable.

La réciproque est fausse puisque 5 n'est pas atteignable.

6. L'idée est de transformer une configuration de signes $+\ -$ en $-\ +$, cela va ajouter 2 au nombre N. Ensuite on complète par la suite $-(N+1)+(N+2)-(N+3)+(N+4)$ et l'on trouve $N+4$. On note $S(i)$ la somme partielle des i-premiers termes. Remarquons que la séquence donnant N se termine par $-(N-1)+N$. La séquence commence par $1+2+3$ et le premier signe – apparaît en position $i+1$. Alors $S(i-1)\geq i$, car $S(3)\geq 4$. On change alors la sous-séquence $i-(i+1)$ en $-i+(i+1)$ ce qui est possible. On ajoute la séquence $-(N+1)+(N+2)-(N+3)+(N+4)$ ce qui assure que $N+4$ est atteignable.
Question subsidiaire :
est-il vrai que les nombres de la forme $N=4k$ ou $4k+1$, hormis 5, 8, 12, 17 sont atteignables ?

Exercice 3 : Fabrique de triplets

Préliminaires

1. Pour tous réels a et b : $xy+1=x+y+(x-1)(y-1)$

Le produit figurant au second membre est positif strictement, par hypothèse. D'où le résultat.

2. Cette fonction est strictement croissante.

Recherche de triplets

3. Si a est supérieur ou égal à 1 alors b et c le sont aussi, et ils sont supérieurs ou égaux à leurs inverses, ce qui nie la condition imposée.

4. Le sens de variation de la fonction f et l'inégalité stricte $c>\dfrac{1}{ab}$ conduisent à $c-\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{ab}-ab$. L'inégalité $a+b+c<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ conduit à $c-\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-a-b$. On a donc : $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-a-b>\dfrac{1}{ab}-ab$. Mais a et b sont strictement inférieurs à 1 et, en appliquant le premier résultat préliminaire, on obtient :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-a-b=(a+b)\left(\frac{1}{ab}-1\right)<(ab+1)\left(\frac{1}{ab}-1\right)=\frac{1}{ab}-ab,$$

Soit finalement $\dfrac{1}{ab}-ab<\dfrac{1}{ab}-ab$. Contradiction. Donc $b\geqslant 1$.

5. On cherche des triplets pour lesquels $b=1$.

L'inégalité de définition s'écrit $c-\frac{1}{c}<\frac{1}{a}-a$, ce qui, compte tenu du sens de variation de la fonction *f*, n'est possible que si $c<\frac{1}{a}$, mais l'inégalité $abc>1$ suppose le contraire. Il n'existe pas de tels triplets dans l'ensemble des solutions.

6. On souhaite trouver *c* vérifiant simultanément $a\leqslant b\leqslant c,\ \ c>\frac{1}{ab}$ et $c-\frac{1}{c}<\frac{1}{a}-a+\frac{1}{b}-b$.

En raison de la continuité et de la croissance de la fonction *f*, il revient au même de prouver qu'il existe un réel $c\geqslant b$ tel que $\frac{1}{ab}-ab<c-\frac{1}{c}<\frac{1}{a}-a+\frac{1}{b}-b$, ou encore que $\frac{1}{ab}-ab<b-\frac{1}{b}<a-\frac{1}{a}+b-\frac{1}{b}\cdot$

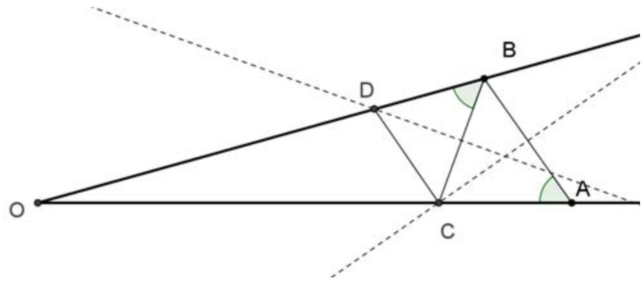
L'inégalité $\frac{1}{ab}-ab<b-\frac{1}{b}$ se réduit, après calculs, à $(1+a)(1-ab^2)<0$, qui résulte de l'hypothèse.

L'inégalité $b-\frac{1}{b}<\frac{1}{a}-a+\frac{1}{b}-b$ s'écrit $2\left(b-\frac{1}{b}\right)<\frac{1}{a}-a$. Or $2\left(b-\frac{1}{b}\right)<2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)$ et

$\left(\frac{1}{a}-a\right)-2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}-2\right)$, quantité positive (le minimum de $x+\frac{1}{x}$ sur]0, 1] est 2).

7. Un triplet « limite » tel que celui-ci : $a=0,84$, $b=c=1,0911$ réalise $abc=1,000019...$ et $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-a-b-c=0,01148...$ La condition n'est donc pas nécessaire (ici $\frac{1}{\sqrt{a}}=1,091089...$)

Exercice 4 : Billard dans un angle



1. On écrit la somme des mesures des angles du triangle ABO, en tenant compte du fait que le triangle CBA est isocèle de sommet principal A :

$$2\alpha+\theta+\widehat{CBO}=180$$

Une condition nécessaire sur α est donc :

$$\alpha\leqslant 90-\frac{\theta}{2}$$

2. Le raisonnement est le même et conduit à $2(180-2\alpha-\theta)+\theta\leqslant 180$, qui peut être traduit en :

$4\alpha\geqslant 180-\theta$, ou encore $\alpha\geqslant 45-\frac{\theta}{4}$.

3. La relation entre l'angle $\widehat{OMM'}$ et l'angle $\widehat{OM'M''}$ s'écrit : $x'=180-2x-\theta$. L'égalité de *x* et *x*' est obtenue pour $x=60-\frac{\theta}{3}$. Si on prend cette valeur pour valeur initiale, on peut construire des points ad libitum.

4. On passe d'un angle de mesure *x* au suivant, de mesure *x*' donnée par $x'=180-2x-\theta$. Calculons la différence entre *x*' et la valeur critique $60-\frac{\theta}{3}$:

$$x'-\left(60-\frac{\theta}{3}\right)=120-2x-\frac{2\theta}{3}=-2\left(x-\left(60-\frac{\theta}{3}\right)\right)$$

Cette dernière égalité montre que la différence entre l'angle $\widehat{\mathrm{OM}_n\mathrm{M}_{n+1}}$ et la valeur critique $60-\frac{\theta}{3}$ double à chaque pas. Si elle n'est pas initialement nulle, elle déborde au bout d'un certain nombre de constructions des valeurs admissibles. Le procédé n'est donc répétable ad libitum que si $\alpha=60-\frac{\theta}{3}\cdot$

5. La condition précédente conduit à une suite de triangles isocèles ayant tous les mêmes angles à la base. Les égalités BC = AC, CD = DB, etc. montrent que la somme des segments « intérieurs » à l'angle est, à la limite, égale au périmètre du triangle OAB.

La longueur AO est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme AC et de raison $\frac{1}{4\cos^2\alpha}\cdot$

La somme des termes de cette suite est : $1=\mathrm{AO}=\mathrm{AC}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{4\cos^2\alpha}}=\mathrm{AC}\dfrac{4\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha-1}\cdot$

On a donc $\mathrm{AC}=1-\dfrac{1}{4\cos^2\alpha}\cdot$

De même, AB + BO est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme AB et de raison $\frac{1}{4\cos^2\alpha}\cdot$

On a donc $\mathrm{AB}+\mathrm{BO}=\mathrm{AB}\ \dfrac{4\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha-1}=2\,\mathrm{AC}\cos\alpha\dfrac{1}{\mathrm{AC}}=2\cos\alpha$.

Le périmètre du triangle ABO est donc $\ell=1+2\cos\alpha$.

Ce périmètre est $1+\sqrt{2}$ lorsque $\alpha=\theta=45$, c'est-à-dire lorsque le triangle ABO est rectangle et isocèle en B.